581378-4 Algoritmisen tietojenkäsittelyn perusteet
5. harjoitus, ma 4.12.2000 klo 12:15–14:00 salissa A217

Tehtävä 5.1: Lauselogiikan kaava on *konjunktiivisessa normaalimuodossa (Conjunctive Normal Form, CNF)* jos se on muotoa

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j}$$

missä kukin $L_{i,j}$ on *literaali* eli mahdollisesti negatoitu muuttujasymboli.

Toisin sanoen, kaava on CNF:ssä jos se on konjunktio literaalien disjunktioista. (Tyhjä konjunktio $m = 0$ tulkitaan identtisesti todeksi ja tyhjä disjunktio $n_i = 0$ identtisesti epätodeksi.)

Kaava on 3CNF:ssä, jos kaikki sen disjunktiot koostuvat enintään kolmesta (eri) literaalista, eli jos jokainen $n_i \leq 3$.

Osoita että SAT-ongelma on NP-täydellinen jo 3CNF-kaavoille.

(Vihje: Käännä alkuperäinen kaava Φ uudeksi 3CNF-kaavaksi α ja uudeksi literaaliksi A siten, että "kaavaohjelma" α asettaa "tulosliteraalinsa" A samaan totuusarvoon kuin Φ.)

Tehtävä 5.2: Onko SAT-ongelma NP-täydellinen *disjunktiivisen* normaalimuodon (DNF) kaavoille? Nämä kaavat saadaan tehtävän 5.1 CNF-kaavoista vaihtamalla disjunktioiden ja konjunktioiden paikat keskenään. Toisin sanoen, literaalit kootaan ensin konjunktioiksi, ja näistä konjunktioista kootaan lopullinen disjunktio.

Tehtävä 5.3: Mikä on SAT-ongelman vastine luokassa co-NP? Onko se täydellinen?

Tehtävä 5.4: Tutustu kalvolla 186 mainittuun lähteeseen

> G.S. Boolos & R.C. Jeffrey: *Computability and Logic* (3. painos), luku 10, Cambridge University Press 1989

joka löytyy paitsi luentokansiosta myös laitoskirjastomme lainakirjahyllystä. Selosta siinä esitetyn todistuksen pääideat.

(Vihje: Vertaa kalvojen 187–190 kaakelointiongelman ratkeamattomuustodistukseen.)

Tehtävä 5.5: Osoita (yksityiskohdat sivuuttaen) kalvolla 190 viitattu tulos: Jos sekä ongelma "$x \in A$?" että ongelma "$x \notin A$?" on osittain ratkeava, niin ongelma "$x \in A$?" onkin ratkeava.

(Vihje: Universaalikone.)

Tehtävä 5.6: Tarkastellaan seuraavaa epädeterministisen Turingin koneen varianttia. Koneessa on *kaksi* nauhaa:

Syötenauha sisältää (nimensä mukaisesti) koneelle annetun syötemerkkijonon x, jossa ei esiinny tyhjämerkkiä #.
Tämän nauhan pää pysyy aina sillä alueella, jonka rajana ovat syötemerkkijonon vasemmalla ja oikealla puolen olevat tyhjämerkit. Tämä pää ei myöskään saa muuttaa lukemiaan merkkejä.

Työnauha on se aluksi tyhjä apumuisti, johon kone saa tehdä omia merkintöjään.

Tämän nauhan pää saa vierailla laskennan kuluessa korkeintaan $O(\log |x|)$ eri ruudussa.

Toisin sanoen kyseessä on eräänlainen epädeterministinen *logaritmitilainen* Turingin kone.

Osoita (yksityiskohdat sivuuttaen) että jos päätösongelma "$x \in A$?" voidaan ratkaista tälläisellä Turingin koneella, niin $A \in \mathrm{P}$.

(Tehtäviä yhteensä 6 kpl.)