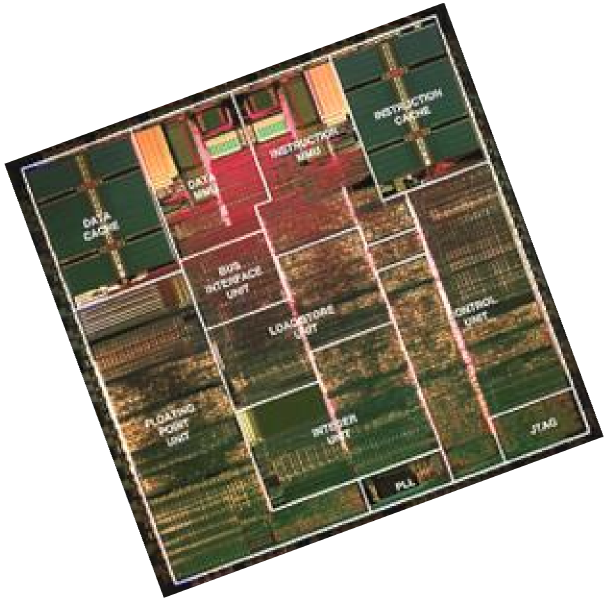
Tietokoneen rakenne

Tietokone-aritmetiikka

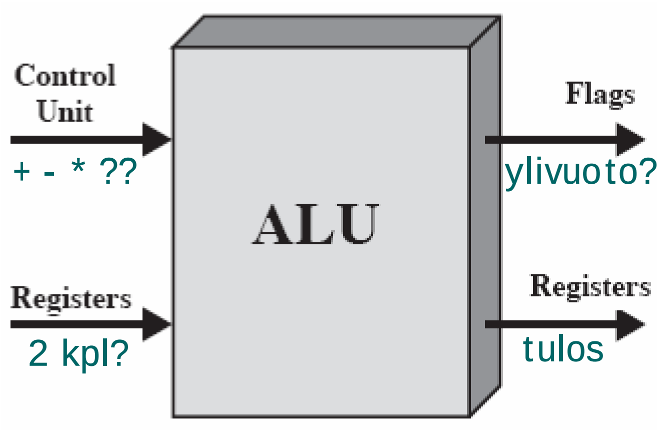


Stallings: Ch 9

- Kokonaislukuesitys
- Kokonaislukuaritmetiikka
- Liukulukuesitys
- Liukulukuaritmetiikka

ALU: Aritmeettis-Looginen Yksikkö

- **ALU = Aritmetic Logic Unit**
- **Suorittava yksikkö, tiedon käsittely**
  - Kokonaisluku ja liukulukuaritmetiikkaa
  - Vertailut, sivuttaissiirrot
  - Bittien kopiointi rekisteristä toiseen
  - Osoitelaskenta: Hypyt, muistiviittaukset
- **Input**
  - Yleensä kaksi operandia sisään
  - Rekistereistä (ja muistista)
- **Operatio**
  - Usein käskyrekisterin perusteella
- **Output**
  - Rekisteriin/Muistiin/PSW:hen



(Sta06 Fig 9.1)

Tietokoneen rakenne

Kokonaislukujen

esitys

Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- Arvo binäärimuodossa, bittijonona
- ”Merkin” paino määräytyy paikan mukaan

$$
\begin{aligned}
57 &= 5*10^1 + 7*10^0 \\
&= 32 + 16 + 8 + 1 \\
&= 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 \\
&= 0011\ 1001 \\
&= \underline{0x}39 \\
&= 3*16^1 + 9*16^0
\end{aligned}
$$

heksadesimaaliesitys

- Eniten merkitsevä bitti / vähiten merkitsevä bitti
  - MSB, most significant bit
  - LSB, Least significant bit

Kokonaislukuesitys (Integer Representation)

- **Entä negatiiviset arvot?**
  - Etumerkki-suuruus
  - 2:n komplemettimuoto

-57 = <u>1</u>011 1001

etumerkki

-57 = <u>1</u>100 0111

- **Tietokoneet käyttävät 2:n komplementtia**
  - Ei erikseen +0 ja -0
  - Laskuissa ei tarvitse erikseen huomioida etumerkkiä
  - Vähennyslasku voidaan suorittaa yhteenlaskuna!
  - Helpompi laitteistolle

+2 = 0000 0010
+1 = 0000 0001
0 = 0000 0000
-1 = 1111 1111
-2 = 1111 1110

2:n komplementti

- **Esimerkki**
  - 8-bittinen esitys, esitä arvo -57

57 = 0011 1001	itseisarvo
1100 0110	invertoi bitit (1:n komplementti)
1100 0110	
1	lisää 1
1100 0111	2:n komplementtimuoto

Hylkää mahd. ylivuotava bitti

  - Laajentuu helposti esim. 16-bittiseksi

57 = 0011 1001 = 0000 0000 0011 1001

-57 = 1100 0111 = 1111 1111 1100 0111

sign extension

2:n komplementti

- **Arvoalue: $-2^{n-1} \ldots 2^{n-1} - 1$**

$$\text{8 bits: } -2^{7} \ldots 2^{7}-1 = -128 \ldots 127$$
$$\text{32 bits: } -2^{31} \ldots 2^{31}-1 = -2\,147\,483\,648 \ldots 2\,147\,483\,647$$

- **Yhteenlaskun ylivuoto helppo havaita**
  - Ei ylivuotoa, jos erimerkkiset yhteenlaskettavat
  - Ylivuoto, jos samanmerkkiset yhteenlaskettavat ja tuloksen merkki eri kuin yhteenlaskettavien merkki

$$
\begin{array}{r}
57 = 0011\ 1001 \\
+\ 80 = 0101\ 0000 \\
\hline
137 = \underline{1}000\ 1001
\end{array}
$$

Ylivuoto!

2:n komplementti

- **Vähennyslasku yhteenlaskuna!**
  - Unohda etumerkki, käsittele etumerkittöminä!
  - Ensin 2:n komplementti vähennettävästä, sitten add
  - Helppo laitteisto

3= 0011

-3 =	1101
+1 =	0001
-2 =	1110

1100
+ 1
= 1101

-3 2:n komplementtiesityksessä

  - Tarkistus
    - Tuliko ylivuoto?
    - Merkki = 1, siis negatiivinen
    - Itseisarvo: invertoi bitit ja lisää 1

(Sta06 Table 9.1)

Kokonaisluku-

aritmetiikkaa

- Negaatio
- Yhteen/vähennyslasku
- Kertolasku
- Jakolasku

Negaatio = 2:n komplementti

- **1: invertoi kaikki bitit**
- **2: lisää 1**
- **3: tarkista erikoistilanteet**
  - Jätä ylivuotobitti huomiotta
  - Muuttuiko merkki?
    - Pienimmälle luvulle ei negaatiota
    - Ellei, aiheuta poikkeus
- **Helppo laitteisto**

-57 = 1100 0111

0011 1000

1

0011 1001

= 57

-128 = 1000 0000

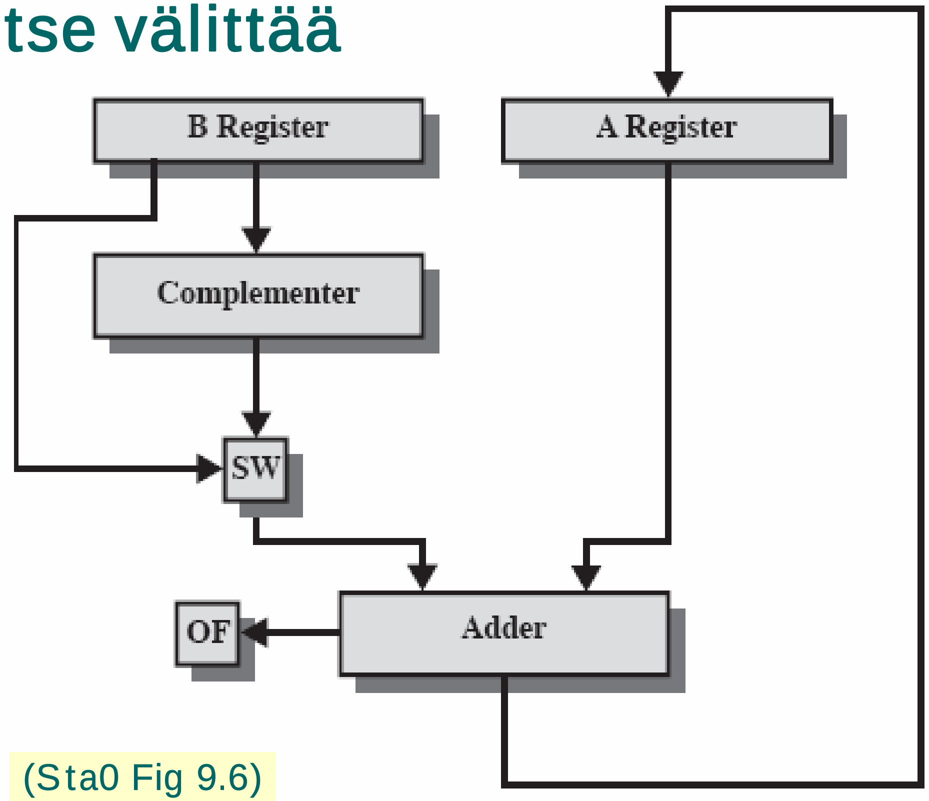
0111 1111

1

1000 0000

Yhteenlasku (ja vähennyslasku)

- Normaali binääri<u>yhteen</u>lasku
  - Jos vähennyslasku, muodosta vähennettävästä ensin komplementti, sitten yhteenlaskuna
- Ylivuotobitistä ei tarvitse välittää
  - Tarkkaile sensijaan summan merkkiä
- Helppo laitetoiminto
  - 2:n komplementtipiiri ja yhteenlaskupiiri



(Sta0 Fig 9.6)

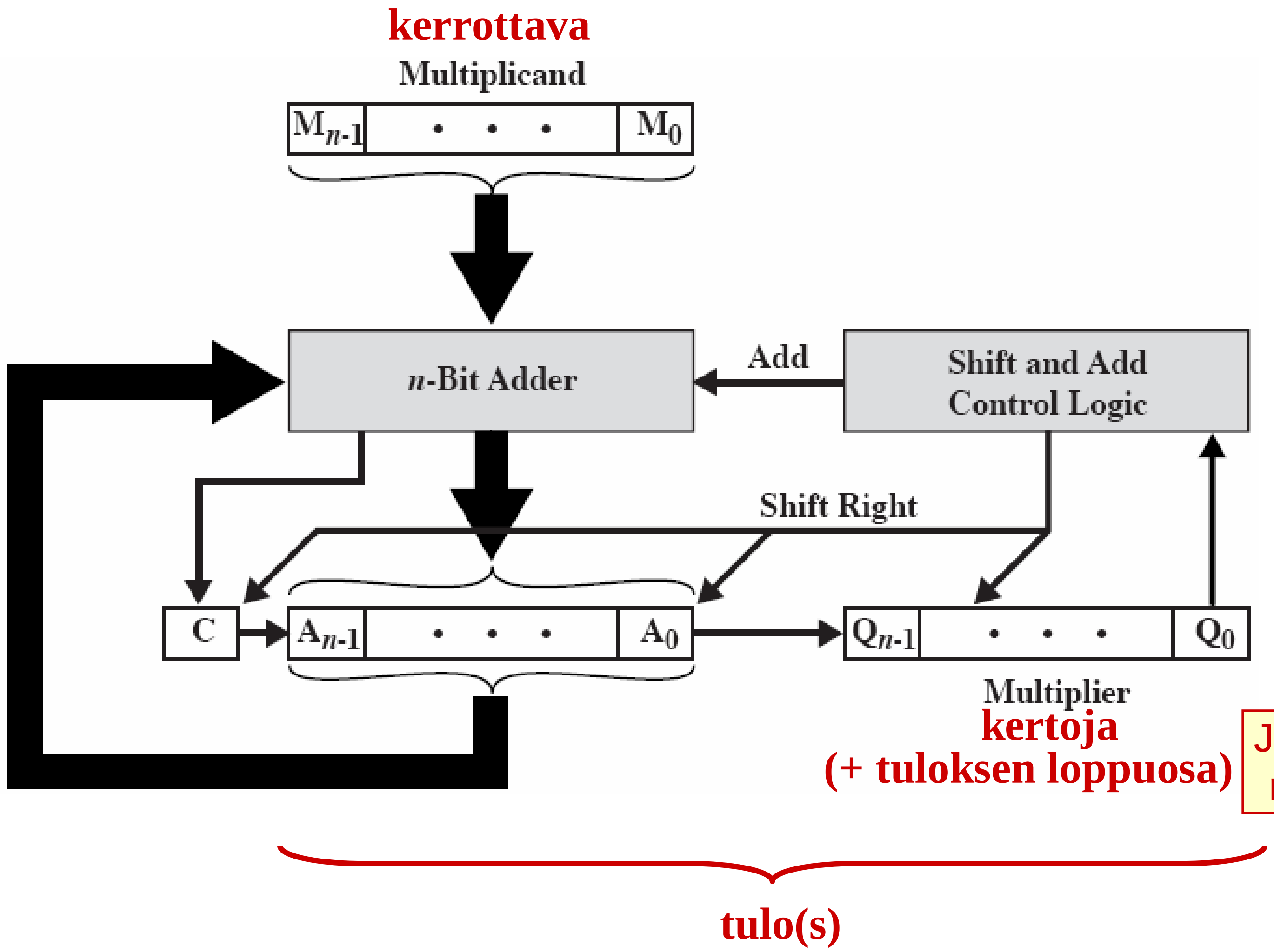
Kokonaislukujen kertolasku

- **Binääriluvuillakin kuten koulussa opittu**
  - Helppo kertoa 0:lla tai 1:llä
- **Laitteistolla?**
  - Monimutkainen
  - Tarjolla useita algoritmeja
- **Ylivuoto?**
  - 32 b operandit ž tulos 64 b?
- **Helppo laitteisto, jos etumerkittömiä**
  - Vain monta yhteenlaskua
  - Tai sivuttaissiirtoa ja yhteenlaskua
    - siirto vasemmalle = kerro 2:lla
    - esim: 5 * => add, shift, shift, add

```
    1011      Multiplicand (11)
   ×1101      Multiplier (13)
   -----
    1011   }
   0000    }  Partial products
  1011     }
 1011      }
--------
10001111      Product (143)
```

(Sta06 Fig 9.7)

Etumerkittömien lukujen kertolasku



Jos Q_0=0 vain shift
muuten add, shift

(Sta06 Fig 9.8a)

Unsigned Multiplication Example (19)

(Fig. 8.8 [Stal99])

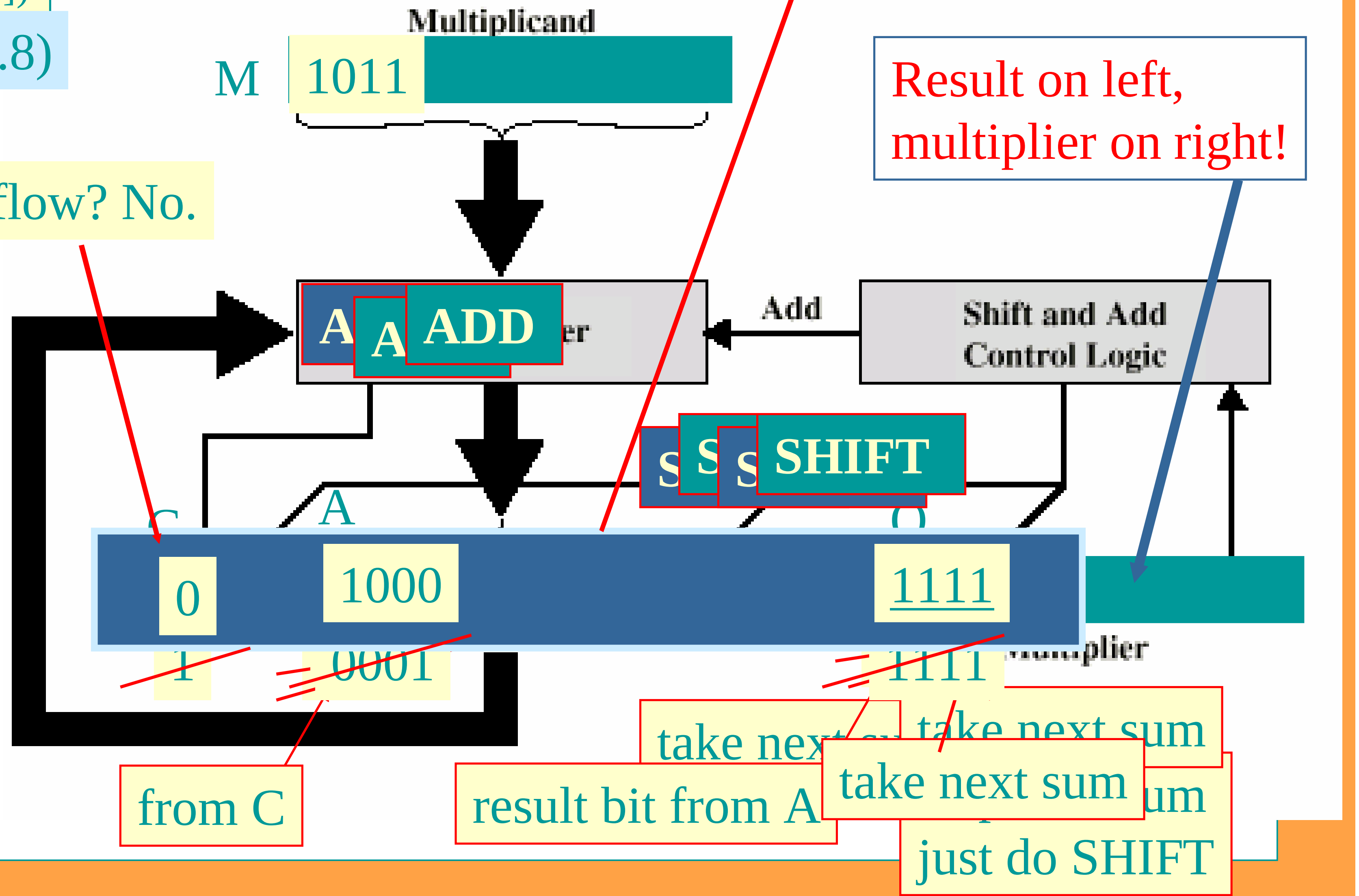
13 * 11 = ???

= 1000 1111 = 128+8+4+2+1 = 143

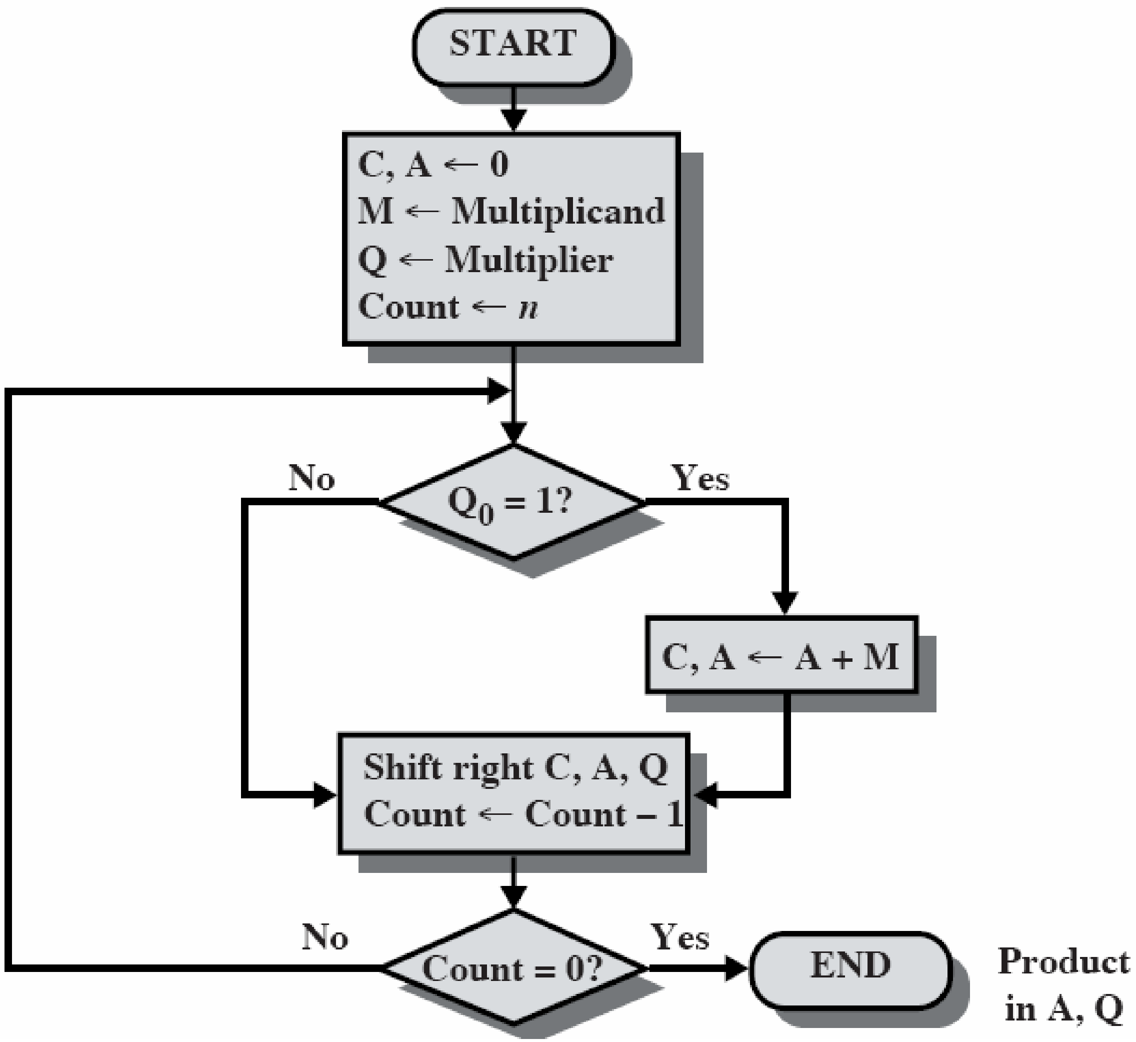
(Fig. 9.8)

Overflow? No.

Result on left, multiplier on right!



Etumerkittömien lukujen kertolasku



(Sta06 Fig 9.9)

Etumerkittömien kertolasku

[Sta06 Fig 9.8a]

Q * M = 1101 * 1011 = 1000 1111 eli 13*11 = 143

C	A	Q	M		
0	0000	1101	1011	Initial Values	
0	1011	1101	1011	Add	First Cycle
0	0101	1110	1011	Shift	
0	0010	1111	1011	Shift	Second Cycle
0	1101	1111	1011	Add	Third Cycle
0	0110	1111	1011	Shift	
1	0001	1111	1011	Add	Fourth Cycle
0	1000	1111	1011	Shift	

(b) Example from Figure 9.7 (product in A, Q)

(Sta06 Fig 9.8b)

Negatiivisten kertolasku?

- **Ed. algoritmi ei toimi negatiivisille luvuille**
- **Voisi tehdä näin**
  - muuta operandit positiivisiksi kokonaisluvuiksi
  - käytä ed. algoritmia
  - tutki operandien merkki, muuta tulos tarvittaessa komplementtimuotoon
- **Parempia ja nopeampia tapoja olemassa**

Boothin Algoritmi

- **Huomio edell. algoritmista**
  - Yhteenlasku vain (aina), kun kertojassa esiintyy 1
- **Boothin algoritmin idea (tehostus)**
  - Yhdistä vierekkäiset 1:set yhdeksi köntäksi
  - Tee köntälle yksi yhteenlasku ja yksi vähennyslasku
  - Esim. 7*x = 8*x +(–x)

    111*x = 1000*x +(-x) =

    shift, shift, shift, complement, add

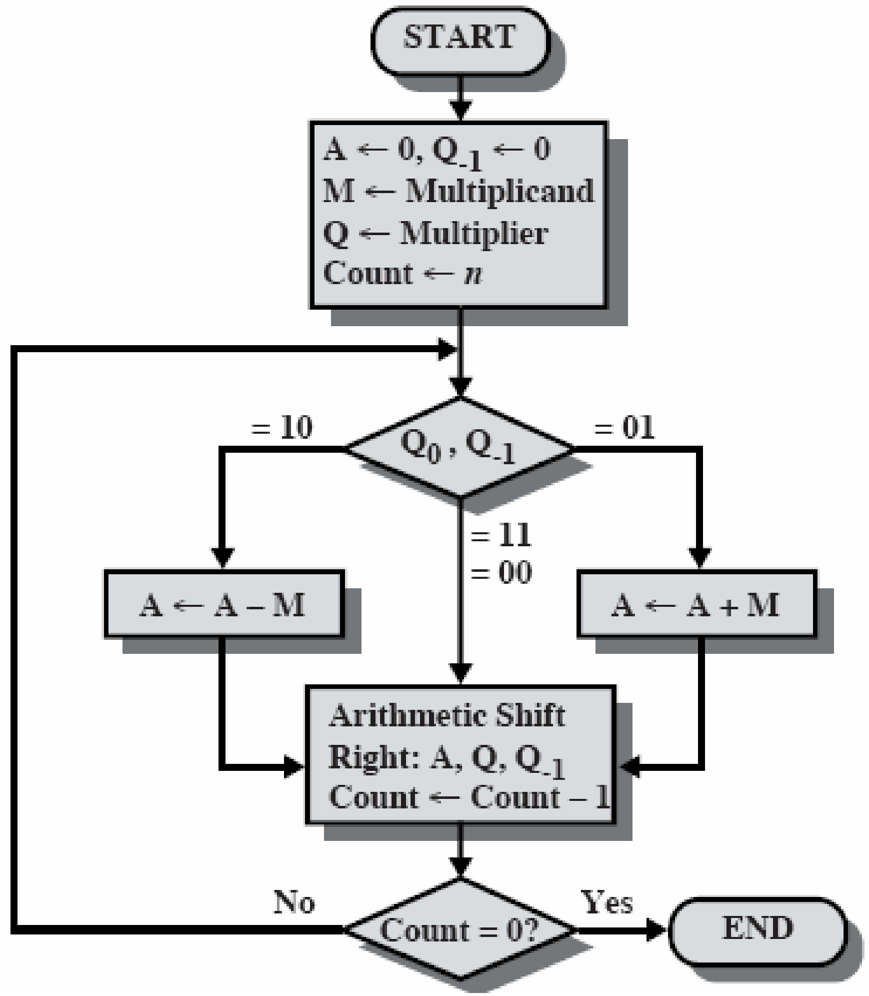
5 * 7 = 0101 * 0111
= 0101 * (1000-0001)

⇨

00101000	40
11111011	-5
100100011	= 35

- **Toimii 2:n komplementtimuodoille, myös negatiivisille!**

Boothin Algoritmi



10 = könttä alkoi
11 = könttä jatkuu
01 = könttä loppui

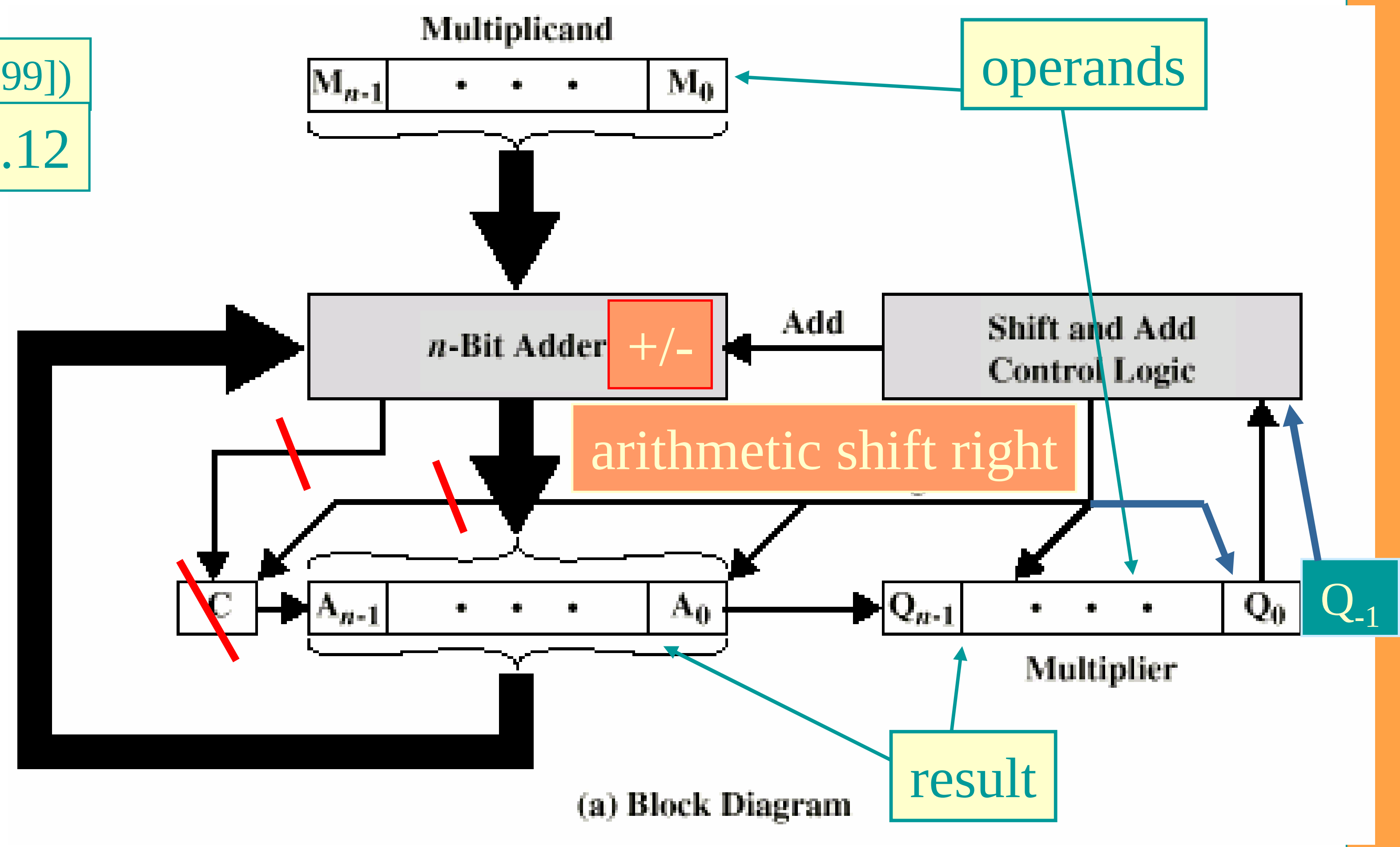
Arithmetic Shift Right:
= täytä etumerkillä

(Sta06 Fig 9.12)

Booth's Algorithm for Twos Complement Multiplication

(Fig. 8.12 [Stal99])

Fig. 9.12

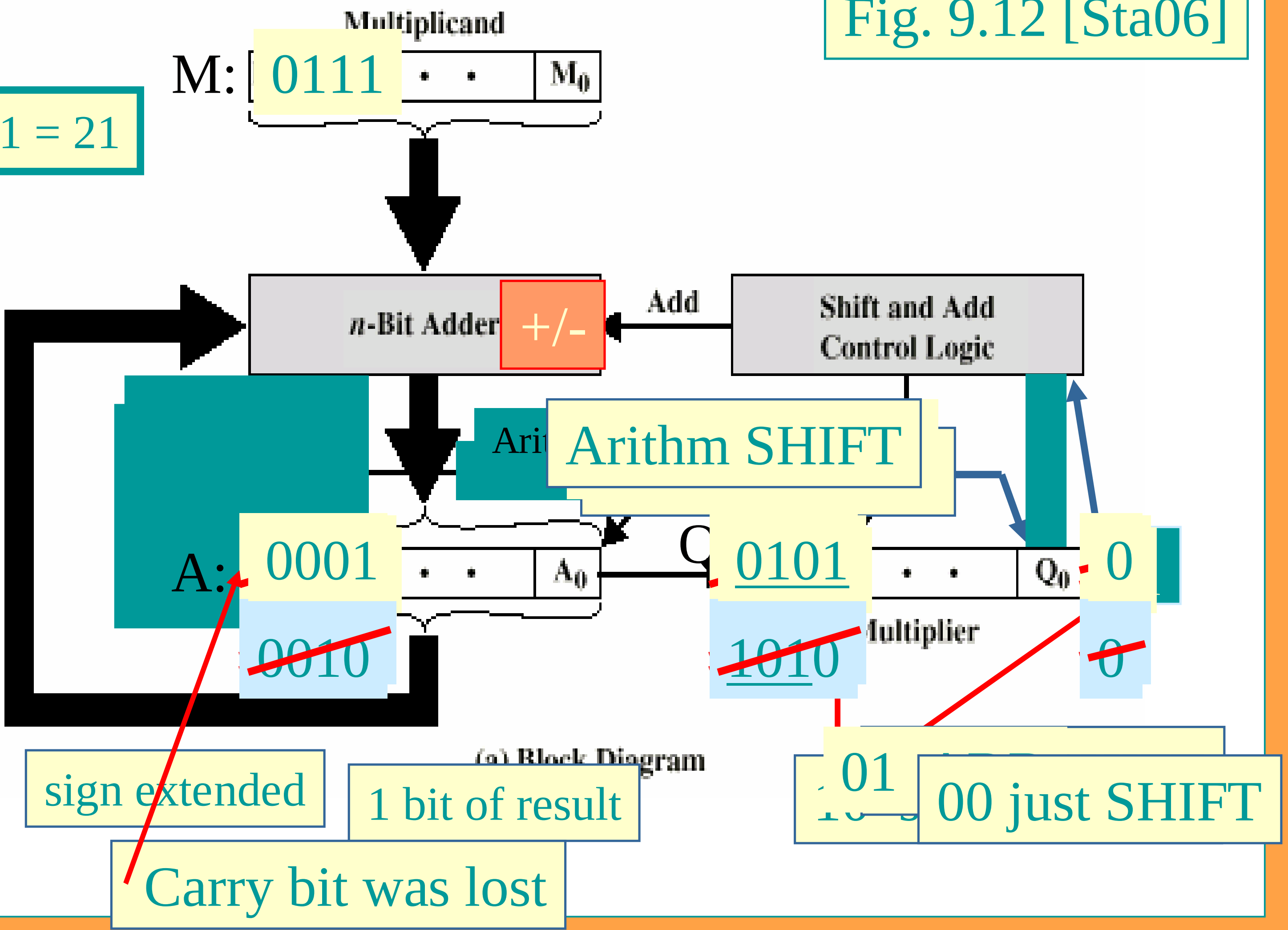


Booth's Algorithm Example (15)

7 * 3 = ?

= 0001 0101 = 21

Fig. 9.12 [Sta06]



Boothin Algoritmi, esim.

Sta06 Fig 9.12

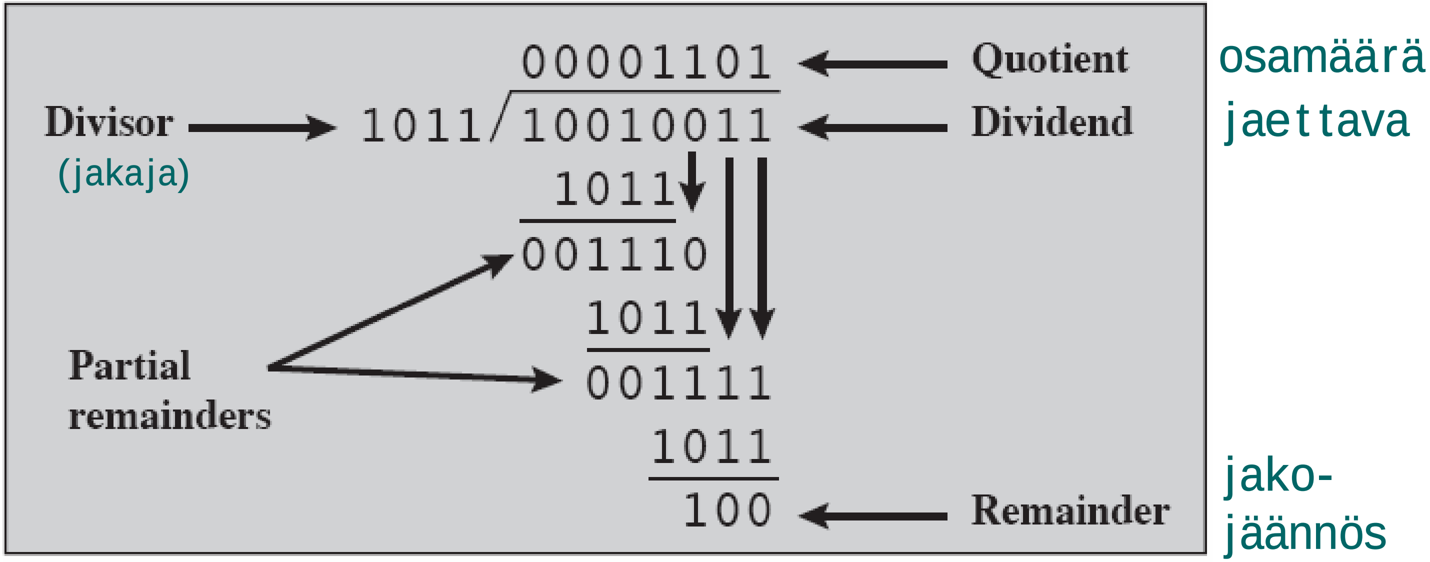
Q * M = 0011 * 0111 = 0001 0101 eli 3*7 = 21

A	Q	Q_{-1}	M		
0000	0011	0	0111	Initial Values	
1001	0011	0	0111	$A \leftarrow A - M$	First Cycle
1100	1001	1	0111	Shift	
1110	0100	1	0111	Shift	Second Cycle
0101	0100	1	0111	$A \leftarrow A + M$	Third Cycle
0010	1010	0	0111	Shift	
0001	0101	0	0111	Shift	Fourth Cycle

(Sta06 Fig 9.13)

Kokonaislukujen jakolasku

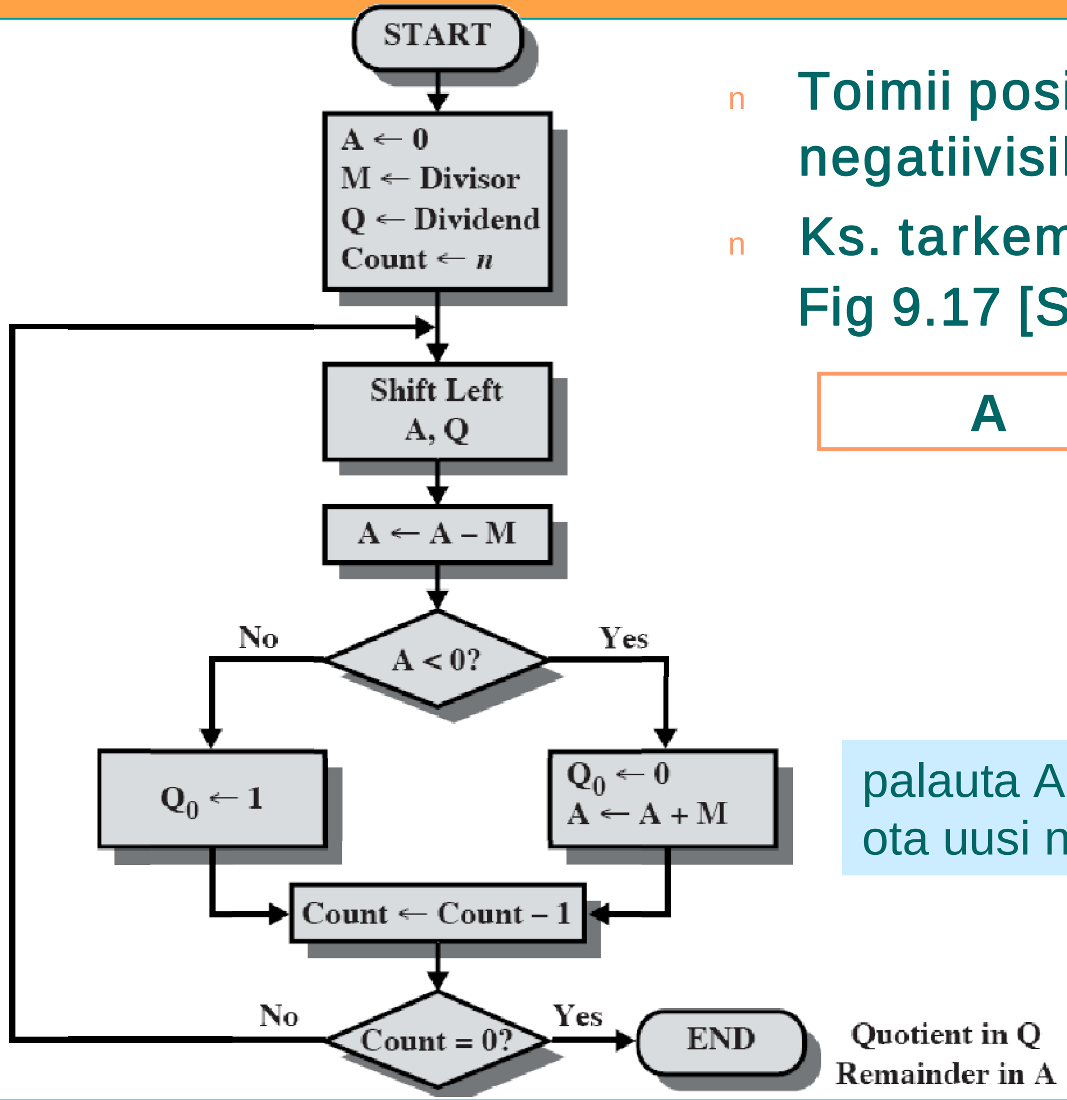
- **Binääriluvuillakin kuten koulussa opittu**
  - Helppo: osamäärään tulee vain 0:ia ja 1:siä



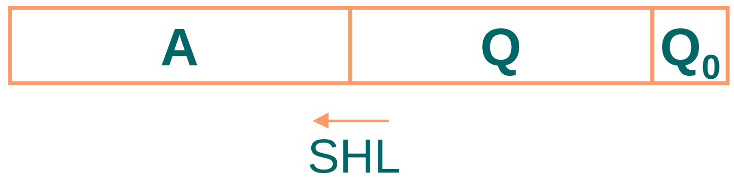
- **Laitteistototeutus vastaavasti kuin kertolaskussa**
  - Siirto vasemmalle = uusi numero mukaan

(Sta06 Fig 9.15)

Kokonaislukujen jakolasku



- Toimii positiivisilla luvuilla, negatiivisille lisävirittelyjä
- Ks. tarkemmin kirjan esimerkki Fig 9.17 [Sta06]

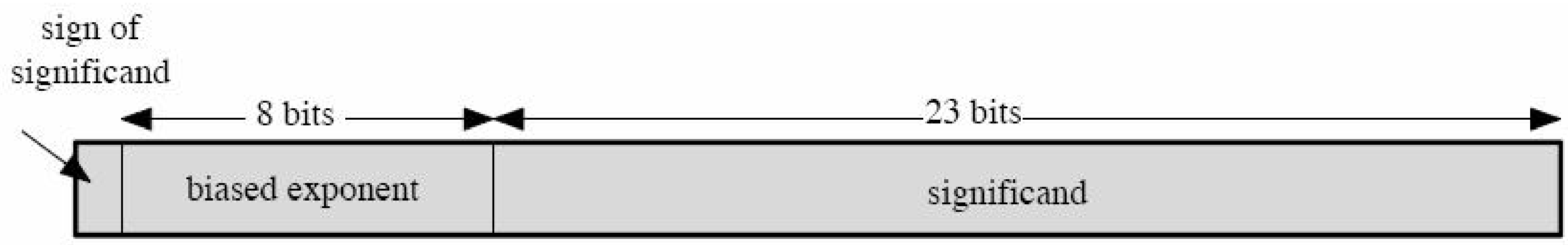


palauta A ennalleen ja ota uusi numero "alas"

Sta06 Fig 9.16

Liukulukuesitys

Liukulukuesitys



- **Merkitsevät numerot ja suuruusluokka**
- **Normeerattu muoto**
  - pistettä edeltävä numero > 0

$$-0.000\,000\,000\,123 = -1.23 * 10^{-10}$$
$$0.123 = +1.23 * 10^{-1}$$
$$123.0 = +1.23 * 10^{2}$$
$$123\,000\,000\,000\,000 = +1.23 * 10^{14}$$

IEEE 754 Liukulukuformaatit

Parameter	Single	Single Extended	Double	Double Extended
Word width (bits)	32	≥ 43	64	≥ 79
Exponent width (bits)	8	≥ 11	11	≥ 15
Exponent bias	127	unspecified	1023	unspecified
Maximum exponent	127	≥ 1023	1023	≥ 16383
Minimum exponent	–126	≤ –1022	–1022	≤ –16382
Number range (base 10)	10^{-38}, 10^{+38}	unspecified	10^{-308}, 10^{+308}	unspecified
Significand width (bits)*	23	≥ 31	52	≥ 63
Number of exponents	254	unspecified	2046	unspecified
Number of fractions	2^{23}	unspecified	2^{52}	unspecified
Number of values	1.98×2^{31}	unspecified	1.99×2^{63}	unspecified

* not including implied bit

(Sta06 Table 9.3)

32-bittinen liukulukuesitys

- **1 b etumerkille**
  - 1 = “-”, 0 = “+”
- **8 b exponentille**
  - Ei erikseen etumerkkiä, vaan erillinen nollataso (bias)
    - Esim. Exp=5 → talleta 127+5, Exp=-5 → talleta 127-5
- **23 b mantissalle** (significant)
  - Normeeratussa muodossa binääripistettä edeltävä numero aina 1, ei talleteta (piilobitti, Zuse Z3 1939)
- **Binäärimuodossa esitetyn liukuluvun arvo**

  $-1^{\text{Sign}} * 1.\text{Mantissa} * 2^{\text{Exponent}-127}$

Esimerkkejä

$$23.0 = +10111.0 * 2^0 = +1.0111 * 2^4 = ?$$

127+4=131

sign	exponent	mantissa
0	1000 0011	011 1000 0000 0000 0000 0000

$$1.0 = +1.0000 * 2^0 = ?$$

0+127 = 127

sign	exponent	mantissa
0	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000

Esimerkkejä

0	1000 0000	111 1000 0000 0000 0000 0000
sign	exponent	mantissa

X = ?

$$X = (-1)^0 * 1.1111 * 2^{(128-127)}$$

$$= 1.1111_2 * 2$$

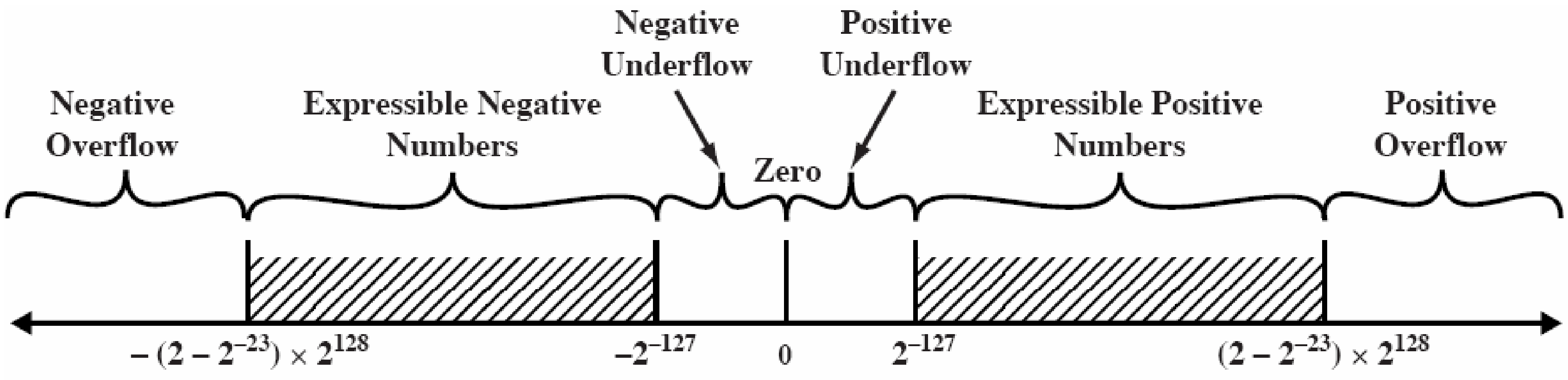
$$= (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16) * 2$$

$$= (1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625) * 2$$

$$= 1.9375 * 2$$

$$= 3.875$$

Liukulukujen tarkkuudesta (32b)



- **Arvoalue**
  - 8 b eksponentti → 2^{-126} ... 2^{127} ~ -10^{-38} ... 10^{38}
- **Tarkkuus**
  - 24 b mantissa → 2^{24} ~ $1.7 * 10^{-7}$ ~ 6 desimaalia
  - Parempi tarkkuus pienille luvuille ilman normalisointia

IEEE 754 Erityismerkitykset

	Single Precision (32 bits)			
	Sign	Biased exponent	Fraction	Value
positive zero	0	0	0	0
negative zero	1	0	0	–0
plus infinity	0	255 (all 1s)	0	∞
minus infinity	1	255 (all 1s)	0	$-\infty$
quiet NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
signaling NaN	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
positive normalized nonzero	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(\underline{1}.f)$
negative normalized nonzero	1	$0 < e < 255$	f	$-2^{e-127}(1.f)$
positive denormalized	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(\underline{0}.f)$
negative denormalized	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0.f)$

Not a Number

Double Precision vastaavasti

(Sta06 Table 9.4)

NaN: Not a Number

Operation	Quiet NaN Produced by
Any	Any operation on a signaling NaN
Add or subtract	Magnitude subtraction of infinities: $(+\infty) + (-\infty)$ $(-\infty) + (+\infty)$ $(+\infty) - (+\infty)$ $(-\infty) - (-\infty)$
Multiply	$0 \times \infty$
Division	$\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$
Remainder	x REM 0 or ∞ REM y
Square root	$\sqrt{x}$ where $x < 0$

(Sta06 Table 9.6)

Liukulukuaritmetiikkaa

- IEEE-754 Standardi
- Yhteen/vähennyslasku
- Kertolasku
- Jakolasku

Liukulukuaritmetiikka

- **Laskentaa varten leveämpiä työrekistereitä**
  - Guard bits
  - Enemmän merkitseviä bittejä mm. mantissalle
  - Käytetään myös normeeraamattomia muotoja
- **Yhteen- ja vähennyslasku**
  - Enemmän välivaiheita kuin kerto/jakolaskussa
  - Operandeille ensin sama eksponentti
    - Toisen normeeraus “purettava” – tarkkuutta häviää
  - Tulos voi vaatia normeerauksen
- **Kerto- ja jakolasku**
  - Mantissa ja eksponentti käsiteltävä erikseen

Liukulukuaritmetiikka

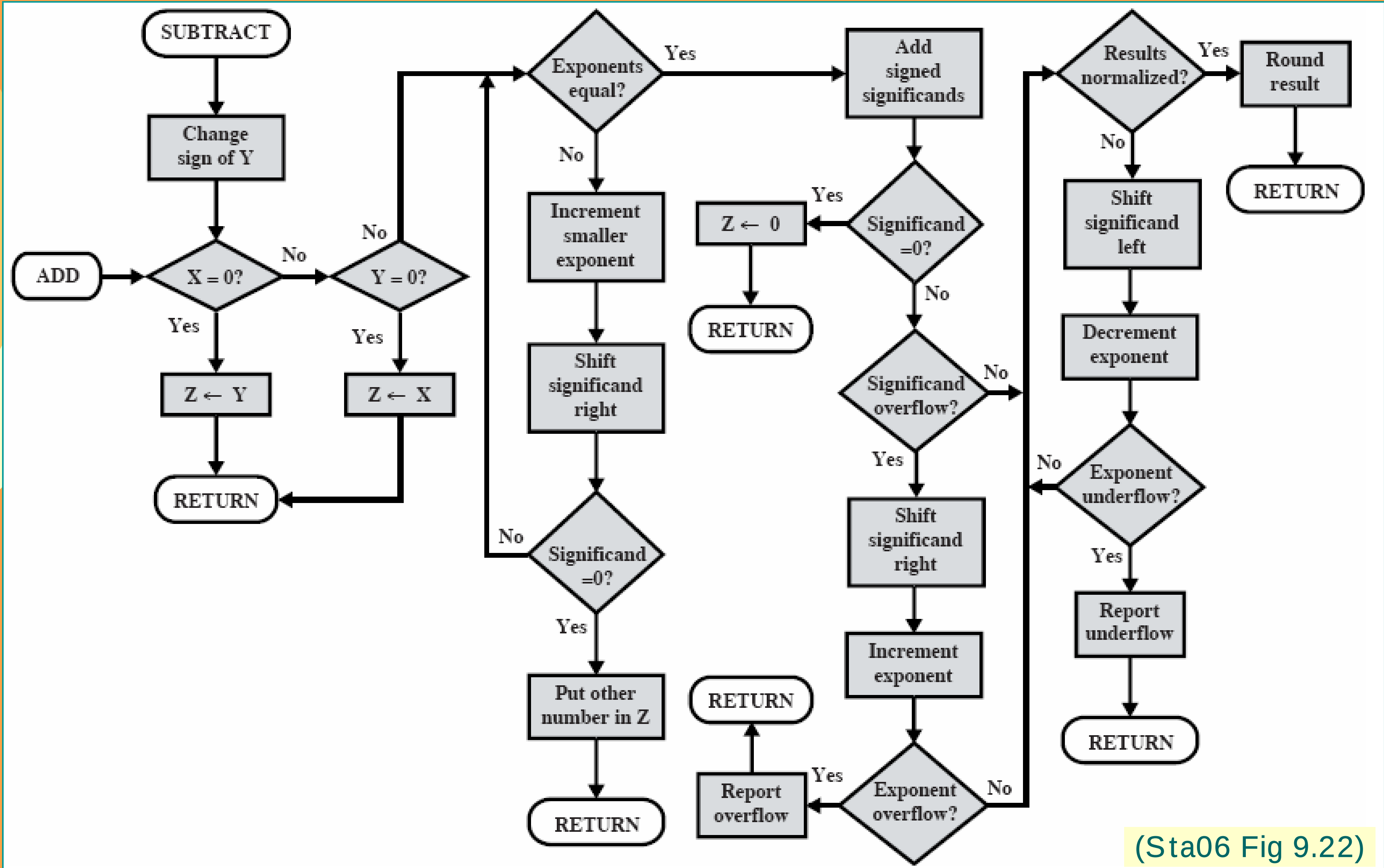
Floating Point Numbers	Arithmetic Operations
$X = X_S \times B^{X_E}$ $Y = Y_S \times B^{Y_E}$	$\left.\begin{array}{l} X + Y = \left(X_S \times B^{X_E - Y_E} + Y_S\right) \times B^{Y_E} \\ X - Y = \left(X_S \times B^{X_E - Y_E} - Y_S\right) \times B^{Y_E} \end{array}\right\} X_E \leq Y_E$ $X \times Y = (X_S \times Y_S) \times B^{X_E + Y_E}$ $\frac{X}{Y} = \left(\frac{X_S}{Y_S}\right) \times B^{X_E - Y_E}$

(Sta06 Table 9.5)

$$X = 0.3 \times 10^2 = 30$$
$$Y = 0.2 \times 10^3 = 200$$

$$X + Y = (0.3 \times 10^{2-3} + 0.2) \times 10^3 = 0.23 \times 10^3 = 230$$
$$X - Y = (0.3 \times 10^{2-3} - 0.2) \times 10^3 = (-0.17) \times 10^3 = -170$$
$$X \times Y = (0.3 \times 0.2) \times 10^{2+3} = 0.06 \times 10^5 = 6000$$
$$X \div Y = (0.3 \div 0.2) \times 10^{2-3} = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15$$

Yhteen- ja vähennyslasku



(Sta06 Fig 9.22)

Erikoistilanteita

- **Eksponentin ylivuoto** (Hyvin suuri luku)
  - Arvoksi ∞ tai -∞ vai
  - Aiheuta poikkeus

ohjelmoitava optio

- **Eksponentin alivuoto** (Olemattoman pieni luku)
  - Arvoksi 0 (tai aiheuta poikkeus)

ohjelmoitava optio

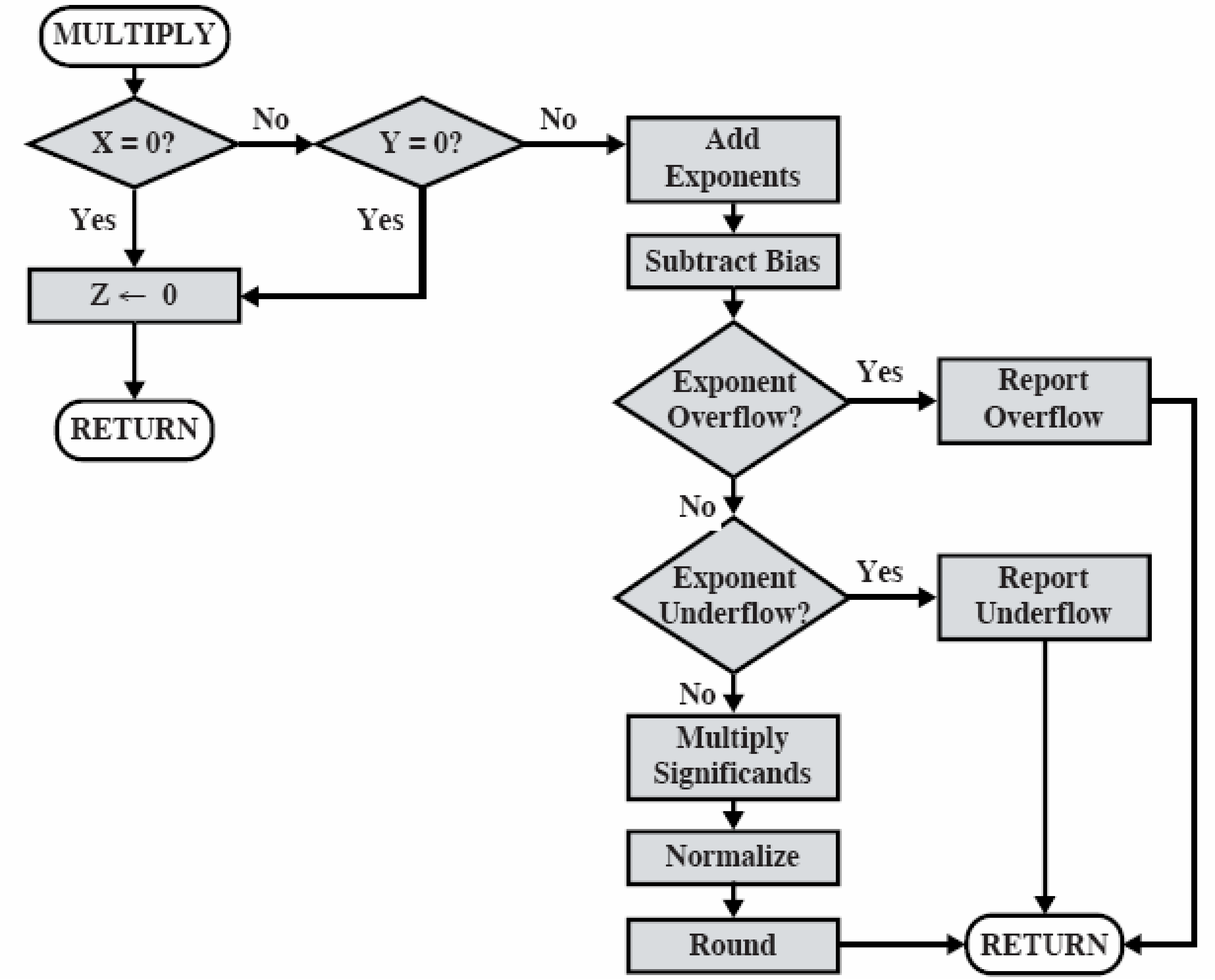
- **Mantissan ylivuoto**
  - Yhteenlaskun tuloksena mantissa, jossa binääripisteen edellä useita numeroita
  - Normeeraa!
- **Mantissan alivuoto**
  - Yhteiseen eksponenttiin siirtyminen voi aiheuttaa merkitsevien bittien katoamista

    (entä, jos kaikki merkitsevät menee?)
  - Pyöristä?

Pyöristys

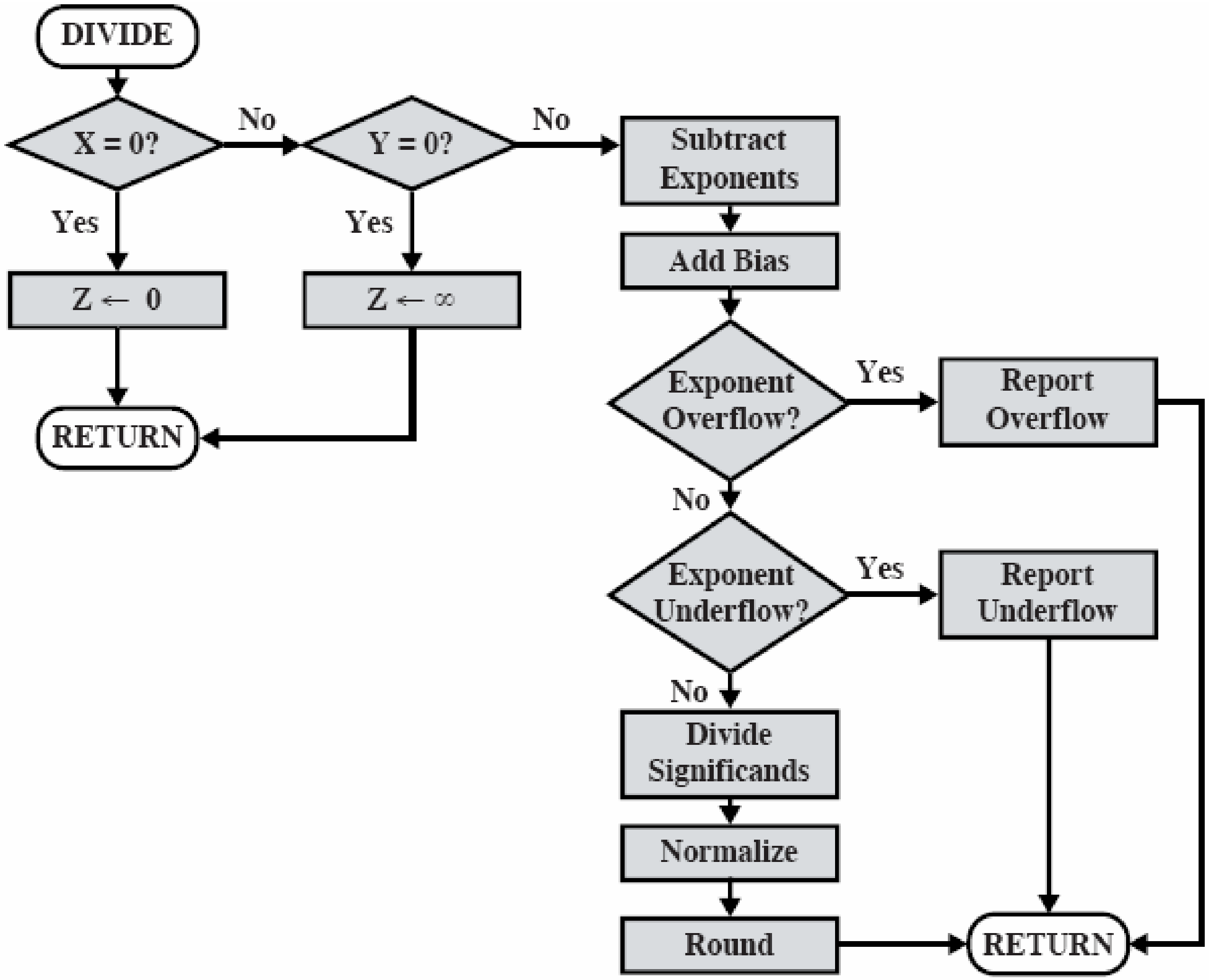
- Esimerkki
  - Arvo neljän desimaalin tarkkuudella — 3.1234, -4.5678
  - Esittämiseen käytössä vain 3 desimaalia
  - Normaalien pyöristyssääntöjen mukaan lähimpään esitettävissä olevaan — 3.123, -4.568
  - Aina ∞ kohti — 3.124, -4.567
  - Aina -∞ kohti — 3.123, -4.568
  - Aina 0 kohti — 3.123, -4.567
- Esim. Intel Itanium -laitteisto tukee näitä kaikkia

Kertolasku



(Sta06 Fig 9.23)

Jakolasku



(Sta06 Fig 9.24)

Kertauskysymyksiä

- Miksi käytetään 2:n komplementtimuotoa?
- Miten 2:n komplementtiesitys laajenee “suurempaan tilaan” (esim. 8b esitys ž 16 b:n esitys)?
- Millainen on yksinkertaisen tarkkuuden liukuluvun esitysmuoto?
- Milloin tulee liukuluvun alivuoto?