58131 Tietorakenteet
I harjoitus, viikko 40/2003

Tehtävä I.1: Osoita $\mathcal{O}$-käsitteen *transitiivisuus*: jos $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ja $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$, niin myös $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

Mitä hyötyä tästä aputuloksesta voisi olla?

Tehtävä I.2: Olkoot $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ei-negatiivisia funktioita, joilla pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Osoita:

(a) Jokainen kertaluokan $\mathcal{O}(f(n))$ funktio kuuluu myös kertaluokkaan $\mathcal{O}(g(n))$.

(b) Toisaalta esimerkiksi $g(n)$ ei itse kuulu kertaluokkaan $\mathcal{O}(f(n))$.

Siis $\mathcal{O}(f(n)) \subsetneq \mathcal{O}(g(n))$.

Mitä hyötyä tällaisesta tavasta vertailla funktioita $f(n)$ ja $g(n)$ toisiinsa voisi olla?

Tehtävä I.3: Allaolevassa taulukossa on funktiopareja $f(n), g(n)$ siten, että tasan toinen ehdoista $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ja $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ pätee. Kumpi?

$f(n)$	$g(n)$
$\frac{n^2-n}{2}$	$6n$
$n + 2\sqrt{n}$	n^2
$n + n\log n$	$n\sqrt{n}$
$n^2 + 3n + 4$	n^3
$n \log n$	$\frac{n\sqrt{n}}{2}$
$n + \log n$	$\sqrt{n}$
$2(\log n)^2$	$\log n + 1$

Tehtävä I.4: *Kuplalajittelu* (Bubblesort) lajittelee syötteenä annetun lukutaulukon $A[1 \ldots N]$ seuraavasti:

1: **for all** i := 1 **up to** $N - 1$ **do**
2:   **for all** j := N **down to** $i + 1$ **do**
3:     **if** $A[j] < A[j-1]$ **then**
4:       vaihda paikkojen $A[j]$ ja $A[j-1]$ sisällöt keskenään
5:     **end if**
6:   **end for**
7: **end for**

(a) Valitse rivien 2–6 sisäsilmukalle sellainen invariantti, josta on sinulle apua kohdassa (b). Osoita että valitsemasi invariantti myöskin pätee.

(b) Valitse rivien 1–7 koko silmukalle sellainen invariantti, josta voit päätellä, että algoritmi toimii oikein. Osoita että valitsemasi invariantti myöskin pätee.

(c) Laske montako kertaa rivi 3 suoritetaan annetulla syötteen pituudella N.

Miksi juuri sen rivin suorituskerrat ovat kiinnostavia?

(d) Toimisiko algoritmi yhä, jos sen riviksi 4 muutettaisiinkin ”vaihda paikkojen $A[j]$ ja $A[\underline{i}]$ sisällöt keskenään” missä muutettu kohta on <u>alleviivattu</u>?

Perustele vastauksesi kohdan (b) invariantilla.

Tehtävä I.5: Tarkastellaan seuraavaa algoritmista ongelmaa:

Algoritmille annetaan parametrina aliohjelma outo$(p\colon \mathbb{Z})\colon \mathbb{Z}$, josta tiedetään vain, että se on aidosti kasvava, eli että outo$(m) <$ outo$(m+1)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$.

Algoritmin on palautettava vastauksenaan sellainen $q \in \mathbb{Z}$ jolla outo$(q) = 0$, tai ”ei ole” jos sellaista q ei olekaan olemassa.

(a) Laadi tälle ongelmalle sellainen algoritmi, joka löytää vastauksen q jos sellainen on, ja kutsuu aliohjelmaa outo vain $\mathcal{O}(\log_2 |q|)$ kertaa.

Todista, että algoritmisi todellakin ratkaisee tehtävän ja täyttää tämän ehdon. Käytä luennolla olleita menetelmiä.

(b) Kuinka monta kertaa algoritmisi kutsuu aliohjelmaa outo siinä tapauksessa, että vastausta q ei olekaan?

(c) Jos aliohjelma outo vie aina vakioajan, niin mikä silloin on algoritmisi kokonaisajantarve?

(d) Jos aliohjelmalle outo päteekin vain outo$(m) \leq$ outo$(m+1)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$, niin toimiiko algoritmisi yhä? Todista vastauksesi.

(Tehtäviä yhteensä 5 kpl.)