

Tehtävä 1. Todennäköisyysslaskentaa. (1 p)

Luennoijalla on huoneessaan kaksi tavallisen näköistä noppaa. Yksi nopista onkin tavallinen ja tuottaa minkä tahansa silmäluvun yhdestä kuuteen yhtä suurella todennäköisyydellä. Toinen noppa sen sijaan on painotettu siten, että silmäluvun kuusi todennäköisyys on $1/2$ ja muiden silmälukujen $1/10$. Heittää ensin tavallista noppaa ja sitten painotettua. Laske seuraavat todennäköisyydet. (Merkintä $P(A|B)$ tarkoittaa ehdollista todennäköisyyttä.)

- a) $P(\text{"molemmilla heitoilla tulee 6"})$

Koska noppien silmäluvut ovat riippumattomat, voidaan laskea

$$P(\text{"ensimmäisellä tulee 6"}) \times P(\text{"toisella tulee 6"}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

- b) $P(\text{"kummallakaan heitolla ei tule 6"})$

Kuten edellä

$$P(\text{"ensimmäisellä ei tule 6"}) \times P(\text{"toisella ei tule 6"}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

- c) $P(\text{"silmälukujen summa on 9"})$

Merkitään noppien tulosta parilla (m, n) , missä m on ensimmäisenä heitetyn, reilun nopan tulos ja n toisena heitetyn, painotetun nopan tulos. Tulos määrittää alkeistapahtuman. Summa on 9 seuraavissa alkeistapahtumissa: $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$. Huomaa, että esimerkiksi tulokset $(3, 6)$ ja $(6, 3)$ ovat eri alkeistapahtumia ja niiden todennäköisyydet poikkeavat toisistaan.

Tulos saadaan laskemalla yhteen Edellä mainittujen alkeistapahtumien todennäköisyydet:

$$P((3, 6)) + P((4, 5)) + P((5, 4)) + P((6, 3)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{8}{60} \approx 0.133.$$

- d) $P(\text{"silmälukujen summa on 9"} \mid \text{"jommalla kummalla tulee 6"})$

Merkitään $A = \text{"silmälukujen summa on 9"}$ ja $B = \text{"jommalla kummalla tulee 6"}$.¹ Koska ehdollinen todennäköisyys saadaan laskemalla $P(A \mid B) = P(A, B)/P(B)$, lasketaan ensin $P(A, B)$ ja $P(B)$ ja otetaan lopuksi osamäärä.

Molemmat tapahtuvat tapahtuvat alkeistapahtumissa $(3, 6)$ ja $(6, 3)$, joten $P(A, B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{6}{60}$. Tapahtuma B on kohdan b tapahtuman "kummallakaan heitolla ei tule 6" komplementti, joten sen todennäköisyys saadaan helposti soveltamalla kaavaa $P(B) = 1 - P(\neg B) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

Osamääräksi saadaan

$$\frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{60}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{35} \approx 0.171$$

¹Jommalla kummalla tulee 6 voidaan tulkita kahdella eri tavalla riippuen siitä, hyväksytäänkö tapaus, jossa molemmilla tulee 6 vai ei. Tässä on hyväksytty.

- e) $P(\text{"jommalla kummalla tulee 6"} \mid \text{"silmlukujen summa on 9"})$ Samaan tapaan kuin edellisessä kohdassa:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A, B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{60}}{\frac{8}{60}} = \frac{6}{8} = 0.75.$$

Tehtävä 2. Bayesin kaava. (1 p)

Käytetään samoja noppia kuin edellisessä tehtävässä.

- f) Mikä on silmlukujen summan jakauma, jos heitetään kaksi kertaa tavallista noppaa?

Jakauma tarkoittaa siis kaikkien mahdollisten tulosten (tässä: summien) todennäköisyyksiä. Summa voi saada arvon välillä $2, \dots, 12$. Minkä tahansa alkeistapahtuman eli parin (m, n) todennäköisyys on tavallisella nopalla $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, joten jakauma saadaan laskemalla, kuinka moni alkeistapahtuma vastaa kutakin summan arvoa.

$$(P(\text{"summa on 2"}), \dots, P(\text{"summa on 12"})) = \left(\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right).$$

- g) Mikä on silmlukujen summan jakauma, jos heitetään kaksi kertaa painotettua noppaa?

Painotetulla nopalla alkeistapahtumien todennäköisyydet poikkeavat toisistaan, joten yksinkertainen kertolasku ei riitä. Tapahtumien (m, n) , missä $m < 6$ ja $n < 6$, todennäköisyydet ovat kaikki $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$. Tapahtumien (m, n) , missä $m < 6$ ja $n = 6$, tai $m = 6$ ja $n < 6$, todennäköisyydet ovat $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$. Tapahtuman $(6, 6)$ todennäköisyys on $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Esimerkiksi silmlukujen summan 9 todennäköisyys saadaan nyt laskemalla

$$P((3, 6)) + P((4, 5)) + P((5, 4)) + P((6, 3)) = \frac{1}{20} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20} = \frac{12}{100} = 0.12.$$

Koko jakauma on

$$(P(\text{"summa on 2"}), \dots, P(\text{"summa on 12"})) = \left(\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100}, \frac{5}{100}, \frac{14}{100}, \frac{13}{100}, \frac{12}{100}, \frac{11}{100}, \frac{10}{100}, \frac{25}{100} \right).$$

Jakauman tarkistamiseksi on vielä syytä varmistaa, että eri summien todennäköisyydet summautuvat yhteen eli että $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 25 = 100$.

- h) Valitaan satunnaisesti jompi kumpi noppa (kummankin todennäköisyys on sama) ja heitetään sitä kaksi kertaa.

Bayesin kaavalla saadaan:

$$\begin{aligned} &P(\text{"heitettiin painotettua noppaa"} \mid \text{"silmlukujen summa on 9"}) \\ &= \frac{P(\text{"summa on 9"} \mid \text{"painotettu noppa"}) P(\text{"painotettu noppa"})}{P(\text{"summa on 9"})}. \end{aligned}$$

Osoittajassa olevat tekijät onkin jo laskettu edellä (kohta g), mutta ärsyttävä nimittäjä joudutaan taas laskemaan jakamalla se kahteen vaihtoehtoiseen tapaan saada summaksi 9:

$$P(\text{"summa on 9"} \mid \text{"tavallinen"}) P(\text{"tavallinen"}) + P(\text{"summa on 9"} \mid \text{"painotettu"}) P(\text{"painotettu"}) \\ = \frac{4}{36} \times \frac{1}{2} + \frac{12}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{26}{225} \approx 0.116.$$

Sijoittamalla Bayesin kaavaan saadaan nyt

$$P(\text{"painotettu noppa"} \mid \text{"summa on 9"}) = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{26}{225}} = \frac{27}{52} \approx 0.519.$$

Kun lasketaan ehdollista todennäköisyyttä, että olisi heitetty tavallista noppaa annettuna, että silmälukujen summa on 9, tulee ärsyttäväksi nimittäjäksi aivan sama termi $P(\text{"silmälukujen summa on 9"}) = \frac{26}{225}$ ja Bayesian kaavasta saadaan

$$P(\text{"tavallinen noppa"} \mid \text{"summa on 9"}) = \frac{\frac{4}{36} \times \frac{1}{2}}{\frac{26}{225}} = \frac{25}{52} \approx 0.481,$$

missä sovellettiin todennäköisyyttä $P(\text{"summa on 9"} \mid \text{"tavallinen noppa"}) = \frac{4}{36}$ kohdan f ja-kaumasta.

Tarkistuslaskenta $\frac{27}{52} + \frac{25}{52} = 1$ läpäisee tarkistuksen.

Huom: Edellisen tulkinta on se, että havainto "summa on 9" ei merkittävässä määrin vaikuta arvaukseen siitä, kumpaa noppaa heitettiin: ennen heittoa kummankin nopan (priori-)todennäköisyys on 50 % ja sen jälkeen (posteriori-)todennäköisyydet ovat noin 52 % vs 48 %. Voit pohtia, mikä tulos vaikuttaisi todennäköisyyksiin eniten.

- i) Valitaan taas satunnaisesti jompi kumpi noppa samalla todennäköisyydellä. Huomataan, että silmäluvuksi tulee kerta toisensa jälkeen kuusi. Kuinka monen heiton jälkeen voidaan olla vähintään 99 % varmoja siitä, että kyseessä on painotettu noppa.

Vihjeen mukaisesti riittää tarkistaa, kuinka monen heiton jälkeen

$$\frac{P(\text{"painotettu noppa"} \mid \text{"k kertaa 6"})}{P(\text{"tavallinen noppa"} \mid \text{"k kertaa 6"})} > 99.$$

Posterioritodennäköisyyksien osamäärä saadaan soveltamalla Bayesian kaavaa sekä osoittajan että nimittäjän tapahtumaan

$$\frac{\frac{P(\text{"k kertaa 6"} \mid \text{"painotettu noppa"}) P(\text{"painotettu noppa"})}{P(\text{"k kertaa 6"})}}{\frac{P(\text{"k kertaa 6"} \mid \text{"tavallinen noppa"}) P(\text{"tavallinen noppa"})}{P(\text{"k kertaa 6"})}},$$

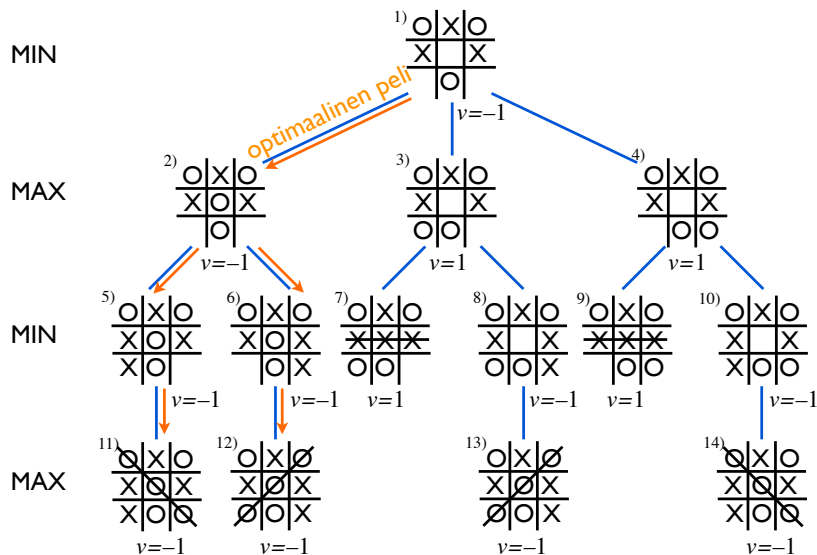
missä ärsyttävä nimittäjä supistuu pois. Koska prioritodennäköisyydet eri nopille ovat tässä tapauksessa samat, supistuu myös prioritermi pois (mikä ei päde yleisesti) ja jäljelle jää vain osamäärä

$$\frac{P(\text{"k kertaa 6"} \mid \text{"painotettu noppa"})}{P(\text{"k kertaa 6"} \mid \text{"tavallinen noppa"})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{6}\right)^k} = 3^k.$$

Pienin k , jolla $3^k > 99$ on $k = 5$. Tarvitaan siis viisi heittoa ennen kuin painotetun nopan posterioritodennäköisyys on yli 99 %.

Tehtävä 3. Minimax ja alpha-beta. (1 piste)

a–b) Pelipuu ja min- ja max-arvot:



Optimaalinen peli (merkitty oranssilla) johtaa nollan voittoon (solmu 11 tai 12).

- c) Alustetaan $\alpha = -1$ ja $\beta = +1$ solmussa 1. Arvot välitetään funktiokutsuissa rekursiivisesti solmujen 2 ja 5 kautta solmuun 11. Solmu 11 palauttaa arvon -1 solmuun 5. Jos ollaan tarkkoja, solmussa 5 suoritetaan ”karsintaa” jättämällä suoritus kesken, koska havaitaan, että lapsesta saatu paluuarvo $v = -1$ toteuttaa ehdon $v \leq \alpha$ (koska $-1 \leq -1$). Tällä ei kuitenkaan ole merkitystä, koska solmulla 5 ei ole muita lapsia.

Solmun 5 paluuarvo on myös -1 , joka välitetään solmuun 2. Solmu 2 on max-solmu. Koska paluuarvo $v = -1$ ei toteuta ehtoa $v \geq \beta$, karsintaa ei tapahdu, vaan jatketaan suoritusta seuraavaan lapseen, solmuun 6. Solmujen 12 ja 6 suoritus vastaan solmujen 11 ja 5 suoritusta.

Solmun 2 paluuarvo -1 välitetään juurisolmuun 1, joka on min-solmu. Nyt ehto $v \leq \alpha$ toteutuu (koska $-1 \leq -1$) ja keskimmäistä tai oikeanpuoleista haaraa ei tarvitse käydä läpi ollenkaan.

Lasten järjestyksellä on merkitystä. Juurisolmussa tapahtuu karsintaa vain lapsisolmun 2 karsittelyn kohdalla. Yleensäkin karsintaa tapahtuu silloin, kun vuorossa olevan pelaajan (max tai min) kannalta parhaat siirrot käydään läpi ennen huonompia siirtoja.

Tehtävä 4. Alpha-beta. (1 p)

Tulee kurssin sivulle.

Tehtävä 5. Reittiopas: A*-haku. (2 p)

Tulee kurssin sivulle.