

582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)

1. kurssikoe (4.3.)

Tässä kokeessa ”luonnollinen luku” tarkoittaa lukuja, jotka kuuluvat joukkoon $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tehtävissä 1 ja 2 voit esittää algoritmin sanallisesti, pseudokoodina tai ohjelmointikielellä.

1. Esitä algoritmi, joka laskee, montako ykkösbittiiä annetun luonnollisen luvun bittiesitys sisältää.

Esimerkiksi luvun 13 bittiesitys 1101 sisältää 3 ykkösbittiiä.

2. Kaksiulotteisen taulukon jokaisessa kohdassa on luonnollinen luku. Tavoitteena on muodostaa reitti taulukon vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan. Joka askeleella on sallittua siirtyä nykyisessä kohdassa olevan luvun verran oikealle tai alaspäin. Reitti ei saa mennä taulukon ulkopuolelle.

Tehtävänä on laskea, kuinka monta yllä kuvattua reittiä on olemassa annetussa taulukossa. Esitä tehtävään dynaamisen ohjelmoinnin algoritmi ja määritä sen aikavaativuus.

Esimerkiksi seuraavassa taulukossa tuloksen pitäisi olla 3:

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	1
1	2	1	2

Reitit ovat seuraavat:

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	1
1	2	1	2

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	1
1	2	1	2

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	1
1	2	1	2

3. Taulukon sisältö on seuraava:

9	1	4	9	8	5	5	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Piirrä summataulukko ja \sqrt{n} -rakenne, joiden avulla voi laskea tehokkaasti taulukon minkä tahansa osan lukujen summan.

4. Päteekö seuraava yhtälö kaikilla luonnollisilla luvuilla n ? Perustele vastauksesi täsmällisesti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n! \\ (n+1)! \\ (n+2)! \\ (n+3)! \end{pmatrix}$$