582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)

1. kurssikokeen (4.3.) ratkaisuja

Tässä kokeessa ”luonnollinen luku” tarkoittaa lukuja, jotka kuuluvat joukkoon $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Tehtävissä 1 ja 2 voit esittää algoritmin sanallisesti, pseudokoodina tai haluamallasi ohjelmointikielellä.

1. Esitä algoritmi, joka laskee, montako ykkösbittiä annetun luonnollisen luvun bittiesitys sisältää.

   Esimerkiksi luvun 13 bittiesitys 1101 sisältää 3 ykkösbittiä.

   Ratkaisu:

   Seuraava Java-metodi laskee annetun luvun ykkösbittien määrän. Ideana on siirtää bittejä askel kerrallaan oikealle ja laskea mukaan joka vaiheessa luvun viimeinen bitti.

```
int ykkosbitit(int luku) {
    int tulos = 0;
    while (luku > 0) {
        tulos += luku&1;
        luku = luku>>1;
    }
    return tulos;
}
```

2. Kaksiulotteisen taulukon jokaisessa kohdassa on luonnollinen luku. Tavoitteena on muodostaa reitti taulukon vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan. Joka askeleella on sallittua siirtyä nykyisessä kohdassa olevan luvun verran oikealle tai alaspäin. Reitti ei saa mennä taulukon ulkopuolelle.

   Tehtävänä on laskea, kuinka monta yllä kuvattua reittiä on olemassa annetussa taulukossa. Esitä tehtävään dynaamisen ohjelmoinnin algoritmi ja määritä sen aikavaativuus.

   Esimerkiksi seuraavassa taulukossa tuloksen pitäisi olla 3:

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	1
1	2	1	2

   Reitit ovat seuraavat:

2	3	1	2
5	1	2	4
3	3	5	**1**
1	2	1	**2**

2	3	**1**	2
5	1	**2**	4
3	3	5	1
1	2	**1**	**2**

2	3	**1**	**2**
5	1	2	4
3	3	5	**1**
1	2	1	**2**

   Ratkaisu:

   Merkitään $L(y, x)$ taulukon tietyssä kohdassa olevaa lukua ja $T(y, x)$ erilaisten tiettyyn kohtaan päättyvien reittien määrää. Tehtävänannon esimerkissä haluttu tulos on siis $T(4, 4) = 3$.

   Arvon $T(y, x)$ saa laskettua tehokkaasti, kun sitä ennen on laskettu kaikki arvot $T(y', x)$ ja $T(y, x')$, joissa $y' < y$ ja $x' < x$. Riittää laskea summaan kaikki sellaiset arvot $T(y', x)$, joissa $y' + L(y', x) = y$, sekä kaikki sellaiset arvot $T(y, x')$, joissa $x' + L(y, x') = x$.

   Esitetyn ratkaisun aikavaativuus on $O(n^3)$, jossa n on taulukon sivunpituus. Tämä johtuu siitä, että taulukossa on $O(n^2)$ kohtaa ja jokaisen käsittelyyn kuluu $O(n)$ aikaa.

3. Taulukon sisältö on seuraava:

9	1	4	9	8	5	5	6	1

Piirrä summataulukko ja $\sqrt{n}$-rakenne, joiden avulla voi laskea tehokkaasti taulukon minkä tahansa osan lukujen summan.

Ratkaisu:

Taulukkoa vastaava summataulukko on seuraava:

9	10	14	23	31	36	41	47	48

Taulukkoa vastaava $\sqrt{n}$-rakenne on seuraava:

9	1	4	9	8	5	5	6	1

14	22	12

4. Päteekö seuraava yhtälö kaikilla luonnollisilla luvuilla n? Perustele vastauksesi täsmällisesti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n! \\ (n+1)! \\ (n+2)! \\ (n+3)! \end{pmatrix}$$

Ratkaisu:

Yhtälö ei päde esimerkiksi silloin, kun $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 24 \\ 89 \end{pmatrix}$$

Tuloksen viimeisen alkion pitäisi olla $5! = 120$ eikä 89.