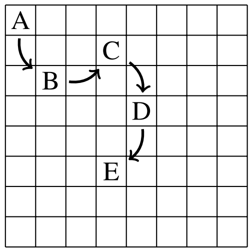
582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)

1. kurssikokeen (27.2.) ratkaisuja

1. Shakissa ratsu liikkuu askeleen vaakasuunnassa ja kaksi askelta pystysuunnassa tai askeleen pystysuunnassa ja kaksi askelta vaakasuunnassa. Tehtävänä on muodostaa 8×8 -laudan vasemmasta yläkulmasta aloittaen reitti, joka käy tasan kerran jokaisessa ruudussa. Reitti voisi alkaa esimerkiksi seuraavasti:



   (a) Osoita, että reittien yhteismäärä on parillinen.

   (b) Osoita, ettei yksikään reitti päädy laudan oikeaan alakulmaan.

   Ratkaisu:

   (a) Kaikissa reiteissä ratsu liikkuu ensin joko kaksi askelta alas ja yhden oikealle tai kaksi askelta oikealle ja yhden alas. Kummankin tyyppisiä reittejä on yhtä monta, koska ne ovat keskenään symmetrisiä. Niinpä reittien yhteismäärä on parillinen.

   (b) Jos reittiä tarkastellaan shakkilaudan värityksellä, joka toinen ruutu on musta ja joka toinen valkoinen. Jos reitti päättyisi oikeaan alakulmaan, ensimmäisen ja viimeisen ruudun väri olisi sama. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska reitillä on 64 ruutua eli parillinen määrä ruutuja.

2. Laudan pituus on n metriä ja tehtävänä on jakaa se 2 ja 3 metrin osiin. Funktio $L(n)$ ilmaisee, montako erilaista jakotapaa on olemassa. Esimerkiksi $L(8) = 4$, koska jakotavat ovat:

   (a) Esitä funktio $L(n)$ rekursiivisessa muodossa.

   (b) Laske dynaamisen ohjelmoinnin avulla $L(16)$.

   (c) Esitä matriisit A ja B, jotka toteuttavat seuraavan yhtälön:

$$A^n B = \begin{pmatrix} L(n) \\ L(n+1) \\ L(n+2) \end{pmatrix}$$

   Ratkaisu:

   (a) Rekursiivinen funktio on seuraava:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = 0 \\ 0 & \text{jos } n = 1 \\ 1 & \text{jos } n = 2 \\ L(n-3) + L(n-2) & \text{muuten} \end{cases}$$

(b) Tuloksista muodostuu seuraava taulukko:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$L(n)$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37

Tämän perusteella $L(16) = 37$.

(c) Määritellään matriisit seuraavasti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Jenna ja Juhani pelaavat tikkupeliä, jossa on seuraavat säännöt:

   - Jos tikkumäärä on *parillinen*, voi poistaa joko yhden tikun tai puolet tikuista.
   - Jos tikkumäärä on *pariton*, on pakko poistaa yksi tikku.

   Pelin häviää se, joka joutuu poistamaan viimeisen tikun.

   Pelin alussa tikkuja on 20 ja Juhani aloittaa. Kumpi voittaa, jos molemmat pelaavat optimaalisesti? Perustele vastauksesi huolellisesti.

   Seuraavassa on kaksi esimerkkipeliä. Ensimmäisessä pelissä Juhani voittaa, toisessa Jenna voittaa.

   - $20 \to 10 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$
   - $20 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1$

   Ratkaisu:

   Juhani voittaa varmasti poistamalla joka vuorolla yhden tikun. Tällöin Jennan on aina pakko poistaa yksi tikku, kunnes lopulta hänen on pakko poistaa viimeinen tikku.

4. Taulukon sisältö on seuraava:

9	1	4	9	8	5	5	6

   Piirrä segmenttipuu, jonka avulla voi laskea taulukon minkä tahansa välin xor-summan. Esimerkiksi luvusta 1 lukuun 8 xor-summa on 1 xor 4 xor 9 xor 8 = 4.

   Ratkaisu:

   Tässä on taulukkoa vastaava segmenttipuu xor-summien laskemiseen: