582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)

2. kurssikokeen (3.5.) ratkaisuja

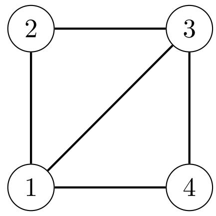
1. Määritä jokaisesta seuraavasta väitteestä, pitääkö se paikkansa. Jos väite pitää paikkansa, niin todista se. Muussa tapauksessa anna vastaesimerkki, jossa väite ei pidä paikkaansa.

   Tässä tehtävässä kaikki verkot ovat suuntaamattomia ja painottamattomia.

   (a) Jos verkko on tasoverkko, niin siinä on Eulerin kierros.
   (b) Jos verkossa on Hamiltonin kierros, niin jokaisen solmun aste on pariton.
   (c) Jos verkko on yhtenäinen, niin siinä on artikulaatiopiste.
   (d) Jos verkko on 2-yhtenäinen, niin se on yhtenäinen.
   (e) Jos verkossa on Eulerin kierros, niin se on tasoverkko.
   (f) Jos verkko on puu, niin se on tasoverkko.

   Ratkaisu:

   Seuraava verkko osoittaa, että väitteet (a), (b) ja (c) eivät pidä paikkaansa:



   Verkko on tasoverkko, mutta siinä ei ole Eulerin kierrosta, koska solmujen 1 ja 3 aste on pariton. Verkossa on Hamiltonin kierros $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$, mutta solmujen 2 ja 4 aste on parillinen. Verkko on yhtenäinen, mutta mikään solmuista ei ole artikulaatiopiste.

   Väite (d) pitää paikkansa, koska 2-yhtenäisyys tarkoittaa, että verkko on yhtenäinen minkä tahansa solmun poiston jälkeen. Tällöin sen on pakko olla yhtenäinen, jos solmua ei edes poisteta.

   Väite (e) ei pidä paikkaansa. Tarkastellaan verkkoa K_5, jossa on 5 solmua ja kaikkien solmujen välillä on kaari. Verkossa on Eulerin kierros, koska jokaisen solmun aste on 4. Kuitenkaan verkko ei tunnetusti ole tasoverkko.

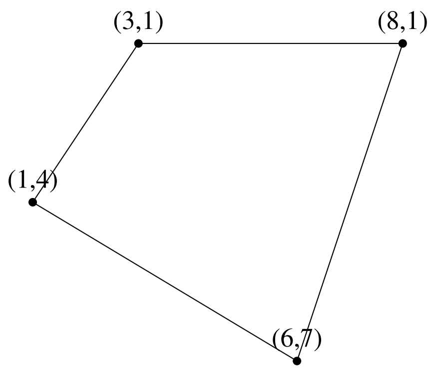
   Väite (f) pitää paikkansa, koska jos verkko ei ole tasoverkko, niin se johtuu siinä olevista sykleistä. Puussa ei ole yhtään sykliä, joten se on varmasti tasoverkko.

2. Piirrä esimerkki pistejoukosta, jonka konveksi peite

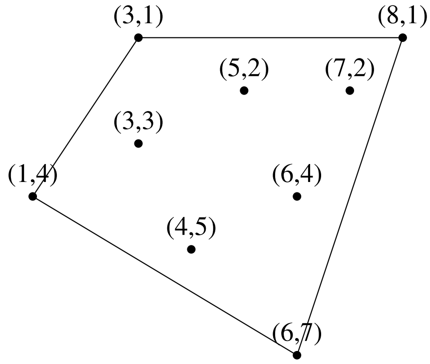
   (a) koskettaa kaikkia pisteitä
   (b) koskettaa alle puolet pisteistä

   Ratkaisu:

   Seuraavassa pistejoukossa konveksi peite koskettaa kaikkia pisteitä:



Seuraavassa pistejoukossa konveksi peite koskettaa 4 pistettä ja pisteitä on yhteensä 9:



3. Uolevi esitti seuraavan algoritmin taulukon lukujen sekoittamiseen:

```
void sekoitaTaulukko(int[] t) {
    for (int i = 0; i < t.length; i++) {
        int a = (int)(Math.random()*t.length);
        int v = t[i];
        t[i] = t[a];
        t[a] = v;
    }
}
```

Toisin sanoen ideana on käydä läpi kaikki taulukon kohdat ja vaihtaa joka kohdassa keskenään kyseisessä kohdassa oleva luku sekä satunnaisessa kohdassa oleva luku.

Uolevi väitti, että algoritmi tuottaa yhtä todennäköisesti minkä tahansa taulukon lukujen järjestyksen. Todista, että Uolevi oli väärässä.

Ratkaisu:

Tarkastellaan tilannetta, jossa taulukossa on 3 lukua. Nämä voidaan järjestää $3! = 6$ eri tavalla. Silmukan joka kierroksella on 3 mahdollista vaihtoa ja algoritmi toistaa silmukkaa 3 kertaa, joten algoritmin erilaisia tuloksia on $3^3 = 27$. Nyt kaikkia järjestyksiä ei voi esiintyä yhtä usein, koska 27 ei ole jaollinen 6:lla.

Kun algoritmi ei toimi edes 3 luvun taulukolla, se ei varmasti toimi yleisesti.