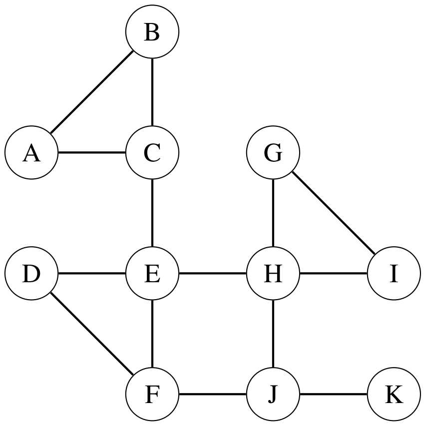
582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)
Viikon 9 ratkaisuja

1. Etsi seuraavasta verkosta kaikki artikulaatiopisteet ja sillat. Onko verkko 2-yhtenäinen?



Ratkaisu:

Verkossa on neljä artikulaatiopistettä: solmut C, E, H ja J. Jos verkosta poistaa minkä tahansa näistä solmuista, niin se ei ole enää yhtenäinen.

Verkossa on kaksi siltaa: C:n ja E:n välinen kaari sekä J:n ja K:n välinen kaari. Jos verkosta poistaa jommankumman näistä kaarista, niin se ei ole enää yhtenäinen.

Verkko ei ole 2-yhtenäinen, koska siinä on artikulaatiopiste.

2. Esitä brute-force-algoritmi, joka tutkii, onko annettu verkko 2-yhtenäinen. Miten algoritmi toimii tehtävän 1 verkossa? Mikä on algoritmin aikavaativuus?

Ratkaisu:

Suoraviivainen ratkaisu on käydä läpi kaikki verkon solmut ja kokeilla, säilyykö verkko yhtenäisenä solmun poistamisen jälkeen. Jos minkään solmun poistaminen ei riko yhtenäisyyttä (eli mikään solmu ei ole artikulaatiopiste), niin verkko on 2-yhtenäinen.

Tehtävän 1 verkossa solmun C poistamisen jälkeen verkko jakaantuu kahteen komponenttiin. Tämä tarkoittaa, että verkko ei ole 2-yhtenäinen. Vastaavasti tapahtuu myös solmujen E, H ja J poistamisen jälkeen.

Algoritmin aikavaativuus on $O(n(n+m))$, jossa n on solmujen määrä ja m on kaarten määrä. Verkon yhtenäisyyden voi tarkistaa ajassa $O(n+m)$ syvyyshaulla, ja tämä tehdään jokaiselle solmulle.

3. Tutustu Hopcroft-Tarjanin tehokkaaseen algoritmiin 2-yhtenäisyyden selvittämiseen. Miten algoritmi toimii tehtävän 1 verkossa?

Ratkaisu:

Hopcroft-Tarjanin algoritmissa on ideana etsiä verkosta artikulaatiopisteitä brute-force-ratkaisua tehokkaammin. Algoritmi muodostaa ensin verkon syvyyshaun mukaisen puun. Tästä puusta voi tunnistaa, onko tietty solmu artikulaatiopiste. Näin on kahdessa tapauksessa:

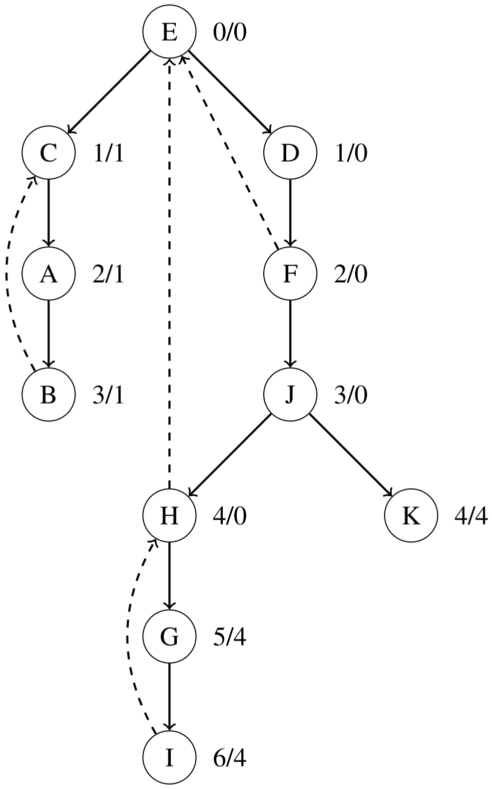
(a) Solmu on puun juurisolmu ja sillä on ainakin kaksi lasta.

(b) Solmulla on lapsi, josta itsestään eikä mistään sen jälkeläisestä ei pääse solmua ylemmäs puussa.

Jos verkossa ei ole yhtään artikulaatiopistettä, niin se on 2-yhtenäinen.

Algoritmi laskee jokaiselle solmulle kaksi arvoa: sen syvyyden puussa sekä matalimman syvyyden, joka on solmun tai jonkin sen jälkeläisen naapurilla. Jos lopuksi solmulla on lapsi, jonka matalin syvyys on sama tai suurempi kuin solmun syvyys, niin solmu on artikulaatiopiste.

Tehtävän 1 verkosta muodostuu seuraava puu, kun syvyyshaku aloitetaan solmusta E:



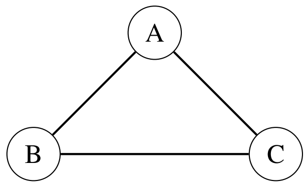
Kuvassa katkoviivat ovat takautuvia kaaria, jotka palaavat aiemmin käsiteltyyn solmuun. Jokaisen solmun kohdalla ensimmäinen luku on sen syvyys ja toinen luku on sen matalin syvyys. Solmu E on artikulaatiopiste, koska se on juurisolmu ja sillä on kaksi lasta. Solmut C, H ja J ovat artikulaatiopisteitä, koska niillä on lapsi, jonka matalin syvyys on sama tai suurempi kuin solmun syvyys.

4. Piirrä kaksi verkkoa, joista toinen on tasoverkko ja toinen ei ole.

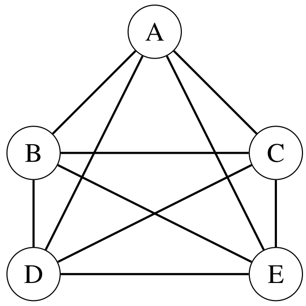
   Perustele huolellisesti, miksi toinen verkko ei ole tasoverkko.

   Ratkaisu:

   Seuraava verkko on tasoverkko, koska sen pystyy piirtämään ilman leikkaavia kaaria:



   Seuraava verkko ei ole tasoverkko:



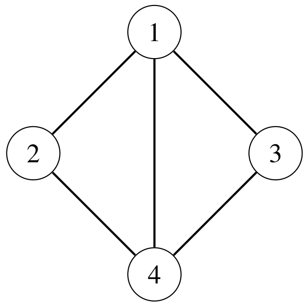
Mistä sitten tietää, että verkko ei ole tasoverkko? Oletetaan ensin, että verkko on tasoverkko ja se on piirretty ilman leikkaavia kaaria. Käytetään samoja merkintöjä kuin tehtävässä 5 (a). Jokaiseen tason osaan liittyy ainakin 3 kaarta ja sama kaari voi kuulua korkeintaan 2 osaan, joten $k \geq 3a/2$. Eulerin kaavan mukaan $s - k + a = 2$, joten $a = 2 - s + k$. Nyt saadaan $k \geq 3(2 - s + k)/2$, josta tulee lopulta $k \leq 3s - 6$.

Äskeisessä verkossa $s = 5$ ja $k = 10$, mikä ei toteuta kaavaa $k \leq 3s - 6$, joten verkko ei ole tasoverkko.

5. (a) Todista Eulerin kaava:

   ”Jos yhtenäisessä verkossa on s solmua ja k kaarta ja se jakaa tason a osaan ilman leikkaavia kaaria, niin $s - k + a = 2$.”

   Esimerkiksi seuraavassa tilanteessa $s = 4$, $k = 5$ ja $a = 3$, joten kaava pätee.



   (b) Perustele, miksi minkä tahansa verkon voi piirtää 3-ulotteisesti ilman leikkaavia kaaria. Siis tasoverkon käsite on mielekäs vain 2-ulotteisessa tilanteessa.

   Ratkaisu:

   (a) Todistetaan kaava induktion avulla. Jos verkossa on pelkkä yksi solmu, niin kaava pätee, koska $s = 1$, $k = 0$ ja $a = 1$. Jos verkkoon lisätään uusi solmu, samalla täytyy tulla uusi kaari, joka kytkee sen aiempaan verkkoon. Tämä ei vaikuta kaavaan, koska sekä s että k kasvavat yhdellä. Jos verkkoon lisätään vain uusi kaari, se tulee kahden vanhan solmun välille ja vanha alue jakaantuu kahteen osaan. Tämäkään ei vaikuta kaavaan, koska sekä k että a kasvavat yhdellä. Tällaisilla lisäyksillä voi muodostaa minkä tahansa yhtenäisen verkon, joten kaava pätee aina.

   (b) Laitetaan kaikki verkon solmut samalle suoralle missä tahansa järjestyksessä. Nyt täytyy enää piirtää kaaret niin, etteivät ne leikkaa toisiaan. 3-ulotteisessa tilanteessa tämä onnistuu helposti valitsemalla jokaista kaarta varten oma 2-ulotteinen taso. Jokaisen tason osana on solmuille valittu suora, mutta tasot eivät muuten leikkaa toisiaan. Kun kaaret piirtää mihin tahansa muualle kuin solmujen suoralle, niin ne eivät leikkaa toisiaan.

6. Toteuta haluamasi algoritmi, joka selvittää, onko verkko tasoverkko vai ei. Etsi sen avulla mahdollisimman pieniä verkkoja, jotka eivät ole tasoverkkoja.

   Ratkaisu:

   Tiedostossa `Tasoverkko.java` on tasoverkkoja etsivä ohjelma. Se muodostaa satunnaisia halutun suuruisia verkkoja ja pitää kirjaa tasoverkkojen ja kaikkien verkkojen suhteesta. Ohjelman toiminta perustuu Kuratowskin teoreemaan: jos verkko ei ole tasoverkko, niin siinä on aliverkko, joka vastaa verkkoa K_5 tai $K_{3,3}$, kunhan 2-asteiset solmut korvataan suorilla kaarilla. Tämä on hyvin hidas algoritmi verrattuna nopeimpiin algoritmeihin, mutta algoritmilla voi käsitellä pieniä verkkoja.