

582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)

Viikon 4 tehtävät (8.2.)

1. DNA-ketju muodostuu merkeistä A, C, G ja T. Yksi tapa tarkastella DNA-ketjua on jakaa se samaa merkkiä toistaviin osiin. Esimerkiksi ketju AGGCTTTAAG muodostuu osista A, GG, C, TTT, AA ja G. Ketjun *pisin toisto* on pisimmän toistavan osan pituus. Esimerkiksi ketjussa AGGCTTTAAG pisin toisto on 3.

Tee tehokkaat algoritmit seuraaviin ongelmiin:

- (a) Montako n -merkin DNA-ketjua on olemassa, joissa pisin toisto on 1?
- (b) Montako n -merkin DNA-ketjua on olemassa, joissa pisin toisto on yli 1?

Kun $n = 10$, niin (a)- ja (b)-kohtien tulokset ovat 78732 ja 969844. Laske tulokset, kun $n = 30$.

2. Tee tehokas algoritmi, joka laskee, monessako n -merkin DNA-ketjussa pisin toisto on korkeintaan k . Esimerkiksi kun $n = 10$ ja $k = 3$, niin tulos on 959472. Laske tulos, kun $n = 30$ ja $k = 5$.
3. Taulukossa on n positiivista kokonaislukua. Tehtävänä on erottaa taulukon luvuista mahdollisimman pitkä ketju, jossa luvut ovat samassa järjestyksessä kuin taulukossa ja jokainen luku on edellistä suurempi. Esimerkiksi taulukossa [3, 2, 8, 5, 3, 4, 1, 9] pisin ketju on [2, 3, 4, 9] eli siihen kuuluu 4 lukua.
Esitä tehokas algoritmi, joka etsii pisimmän ketjun taulukosta. Jos saat aikavaativuuden $O(n^2)$, niin se on riittävän tehokas, mutta myös aikavaativuus $O(n \log n)$ on mahdollinen.
4. *Täydellinen tekoäly* voittaa vastustajan aina, kun on olemassa varma strategia voittoon. Toteuta täydellinen tekoäly seuraaviin peleihin:
 - (a) Pelin alussa pöydällä on n tikkua. Pelaajat nostavat vuorotellen 1, 2 tai 3 tikkua. Pelin häviää se, joka joutuu nostamaan viimeisen tikun.
 - (b) Muutetaan peliä niin, että tikkujen poistomäärät päätetään pelin alussa. Tekoälyn tulee siis sopeutua mihin tahansa poistomääriin. Kohta (a) on tästä erikoistapaus, jossa poistomäärät ovat [1, 2, 3]. Testaa tekoälyä esimerkiksi poistomäärillä [1, 4] ja [1, 3, 7].
5. Toteuta täydellinen tekoäly seuraavaan peliin: Taulukossa on n positiivista kokonaislukua, ja pelaajat poistavat vuorotellen yhden luvun taulukon vasemmasta tai oikeasta reunasta. Peli päättyy, kun kaikki luvut on poistettu, ja pelin voittaja on se, jonka poistamien lukujen summa on suurempi.
6. Tehtävänä on sijoittaa luvut $1 \dots n^2$ taulukkoon, jossa on $n \times n$ ruutua. Vaatimuksena on, että jokaisella pysty- ja vaakarivillä luvut ovat järjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Tässä on yksi tapa muodostaa taulukko, kun $n = 5$:

1	4	7	12	13
2	5	9	15	19
3	8	11	20	22
6	14	16	21	24
10	17	18	23	25

Montako vaatimukset täyttävää taulukkoa on olemassa, kun $n = 10$?

Huom.: Vastaus on suuri luku eikä mahdu 64-bittiseen muuttujaan. Jos toteutat ratkaisun Javalla, niin BigInteger on hyvä valinta.