582359 Algoritmit ongelmanratkaisussa (kevät 2013)
Viikon 6 tehtävät (22.2.)

1. Määritellään matriisit A ja B seuraavasti:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Laske matriisitulot AB ja BA.

2. Määritellään Fibonaccin luvut seuraavasti:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{jos } n = 0 \\ 1 & \text{jos } n = 1 \\ F(n-2) + F(n-1) & \text{muuten} \end{cases}$$

   Perustele, miksi seuraava yhtälö pätee:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}$$

   Laske yhtälön ja tehokkaan matriisipotenssilaskun avulla $F(16)$.

3. Toteuta seuraavat algoritmit Fibonaccin lukujen laskentaan:

   (a) ”perinteinen” for-silmukka

   (b) tehtävässä 2 esitetty menetelmä

   (c) seuraavan kaavan käyttäminen:

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

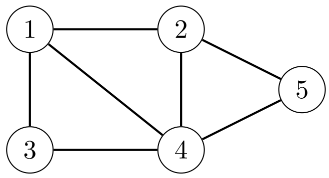
   Vertaile menetelmien tehokkuutta suurilla n:n arvoilla. Mitkä ovat menetelmien aikavaativuudet?

4. Määritellään funktio $N(n)$ seuraavasti:

$$N(n) = \begin{cases} 0 & \text{jos } n < 0 \\ 1 & \text{jos } n = 0 \\ \sum_{i=1}^{6} N(n-i) & \text{jos } n > 0 \end{cases}$$

   Funktio kertoo, monellako tavalla luvun n voi esittää nopan silmälukujen summana. Esitä funktio $N(n)$ tehtävän 2 tapaisessa matriisimuodossa. Laske sitten luvun $N(10^{100})$ viimeiset 5 numeroa.

5. Vierusmatriisi on verkkoa esittävä matriisi, jossa luku 1 tarkoittaa, että kahden solmun välillä on kaari, ja luku 0 tarkoittaa, että kaarta ei ole. Esimerkiksi verkkoa



vastaa vierusmatriisi

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kun vierusmatriisin korottaa potenssiin n, tuloksena on uusi matriisi, joka kertoo, montako erilaista n kaaren polkua on solmujen välillä. Esimerkiksi seuraava matriisi esittää 3 kaaren polkuja yllä olevassa verkossa:

$$V^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriisi kertoo esimerkiksi, että solmusta 1 solmuun 3 on 5 polkua, joissa on 3 kaarta. Nämä ovat:

- $1 \to 2 \to 1 \to 3$
- $1 \to 2 \to 4 \to 3$
- $1 \to 3 \to 1 \to 3$
- $1 \to 3 \to 4 \to 3$
- $1 \to 4 \to 1 \to 3$

Todista, että tämä toimii millä tahansa verkolla ja polun pituudella.

6. Suoraviivainen matriisin kertolaskun toteutus kolmella for-silmukalla vie aikaa $O(n^3)$. Tunnettu tehokkaampi algoritmi on Strassenin algoritmi, joka vie aikaa vain $O(n^{2,807})$. Mutta onko Strassenin algoritmi oikeasti tehokkaampi? Toteuta suoraviivainen algoritmi ja Strassenin algoritmi ja tutki niiden tehokkuutta erikokoisilla matriiseilla.