

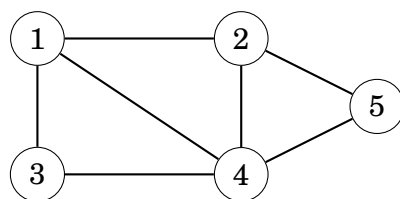
Luku 7

Verkkoalgoritmit

Verkot soveltuvat monenlaisten ohjelmointiongelmien mallintamiseen. Tyypillinen esimerkki verkosta on tieverkosto, jonka rakenne muistuttaa luonnostaan verkkoa. Joskus taas verkko kätkeytyy syvemmälle ongelmaan, eikä sen huomaaminen ole aina helppoa. Tämä luku esittelee verkkoihin liittyviä peruskäsitteitä sekä joukon tärkeitä algoritmeja.

7.1 Määritelmiä

Verkko on tietorakenne, joka muodostuu *solmuista* ja niitä yhdistävistä *kaarista*. Esimerkiksi tieverkostossa verkon solmut ovat kaupunkeja ja kaaret ovat niiden välisiä teitä. Seuraavassa on yksinkertainen verkko, johon kuuluu 5 solmua ja 7 kaarta:

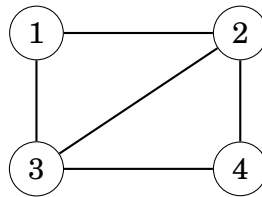


Polku on verkon kaaria pitkin kulkeva reitti kahden verkon solmun välillä. Yllä olevassa verkossa solmusta 1 solmuun 5 on esimerkiksi polut $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ja $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$. Solmun *naapuri* on toinen solmu, johon solmusta pääsee kaarta pitkin, ja solmun *aste* on sen naapurien määrä. Yllä olevassa verkossa solmun 2 naapurit ovat 1, 4 ja 5 ja sen aste on 3.

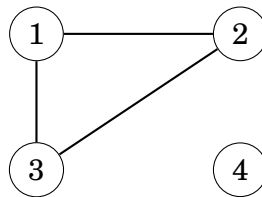
Yhtenäisyys

Verkko on *yhtenäinen*, jos minkä tahansa kahden solmun välillä on polku. Esimerkiksi tieverkosto on yhtenäinen, jos kaikista verkostoon kuuluvista kaupungeista pääsee toisiinsa teitä pitkin.

Tässä on esimerkki yhtenäisestä verkosta:

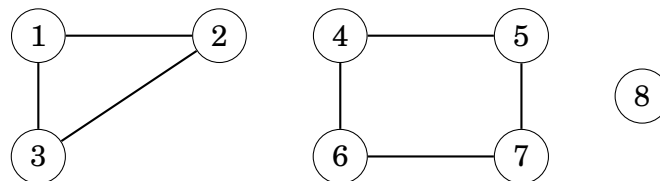


Seuraava verkko ei ole yhtenäinen, koska solmu 4 on erillään muista.



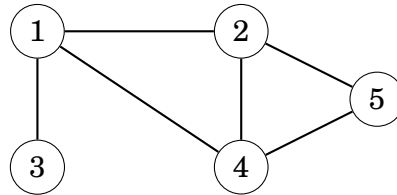
Komponentit

Verkon yhtenäiset osat muodostavat sen *komponentit*. Esimerkiksi seuraavassa verkossa on kolme komponenttia: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$ ja $\{8\}$.

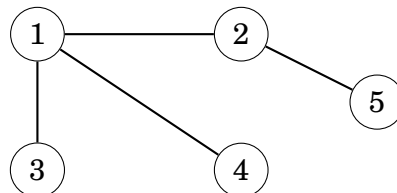


Syklit

Sykli on polku, jonka alku- ja loppusolmu on sama ja jossa ei ole samaa kaarta monta kertaa. Verkko on *syklinen*, jos siinä on sykli, ja muuten *sykkitön*. Seuraava verkko on syklinen, koska siinä on sykli $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.

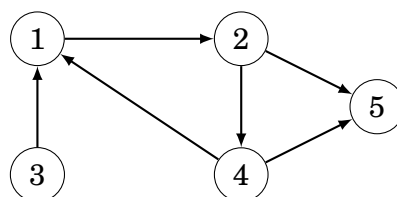


Seuraava verkko taas on sykkitön:



Kaarten suunnat

Verkko on *suunnattu*, jos verkon kaaria pystyy kulkemaan vain niiden merkittyyn suuntaan. Seuraavassa on esimerkki suunnatusta verkosta:

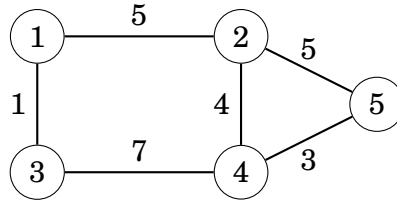


Tässä verkossa on esimerkiksi polku $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ sekä sykli $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$. Solmuun 3 ei pääse mistään muusta solmusta, ja vastaavasti solmusta 5 ei pääse mihinkään muuhun solmuun.

Jos verkon kaarilla ei ole suuntaa, niin verkko on *suuntaamaton*. Toisaalta suuntaamattoman verkon voi tulkita suunnatuksi verkoksi niin, että jokaisen kaaren tilalla on kaaret molempiin suuntiin.

Kaarten painot

Verkko on *painotettu*, jos verkon kaariin liittyy painoja. Tavallinen tulkinta on, että painot kuvaavat matkoja solmujen välillä. Seuraavassa on esimerkki painotetusta verkosta:



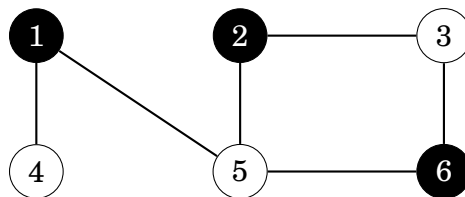
Polun *pituus* saadaan laskemalla yhteen siihen kuuluvien kaarten painot. Esimerkiksi polun $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ pituus on $5 + 4 = 9$ ja polun $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ pituus on $1 + 7 = 8$. Jälkimmäinen polku on *lyhin* polku solmusta 1 solmuun 4.

Jos verkon kaarilla ei ole painoja, niin verkko on *painottomaton*. Tilannetta voi ajatella myös niin, että jokaisen kaaren paino on 1.

Kaksijakoisuus

Verkko on *kaksijakoinen*, jos sen solmut voi värittää kahdella värillä niin, ettei minkään kaaren molemmissa päissä ole samanväristä solmua.

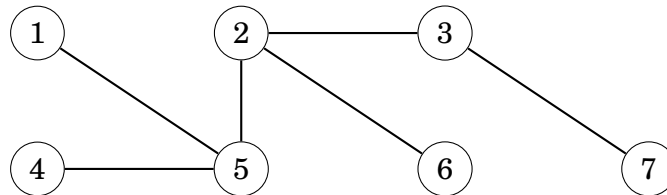
Esimerkiksi seuraava verkko on kaksijakoinen, koska verkolle saa halutunlaisen värityksen esimerkiksi värittämällä solmut 1, 2 ja 6 mustiksi ja solmut 3, 4 ja 5 valkoisiksi.



Kaksijakoisuuden ehtona on, ettei verkossa ole parittoman pituista sykliä. Tällaista sykliä ei ole mahdollista värittää kahdella värillä niin, että kaikki vierekkäin olevat solmut ovat eri värisiä.

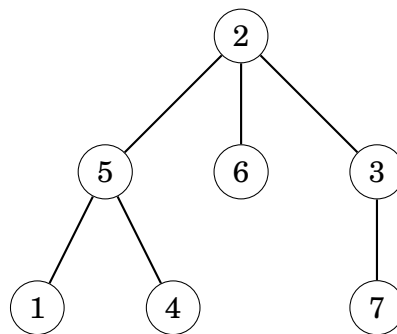
Puu

Verkko on *puu*, jos se on yhtenäinen, syklitön ja suuntaamaton. Esimerkiksi seuraava verkko on puu:



Puussa kaarten määrä on aina yhden pienempi kuin solmujen määrä. Jos puuhun lisää yhden kaaren, siihen tulee sykli, ja jos siitä poistaa yhden kaaren, se ei ole enää yhtenäinen. Lisäksi puussa jokaisen solmuparin välillä on yksikäsitteinen polku.

Puu esitetään usein niin, että yksi solmuista nostetaan puun *juureksi* ja muut sijoittuvat tasoittain sen alapuolelle. Esimerkiksi jos äskeisessä verkossa solmusta 2 tehdään juuri, tulos on tämä:



Juurimuodossa puun *korkeus* on sen tasojen määrä, eli tämän puun korkeus on 3. Solmun *lapset* ovat sen alemman tason naapurit ja *vanhempi* on sen ylemmän tason naapuri. Esimerkiksi solmun 5 lapset ovat solmut 1 ja 4 ja sen vanhempi on solmu 2. Jos solmulla ei ole lapsia, se on *lehti*. Tässä puussa solmut 1, 4, 6 ja 7 ovat lehtiä.

Puut tulevat vastaan monissa yhteyksissä algoritmeissa. Tässä kirjassa sovelluksia puista ovat olleet jo luvun 4 tietorakenteet binääripuu ja keko sekä luvun 5 hakualgoritmien rekursiivinen toiminta.