58131 Tietorakenteet
Erilliskoe 15.9.2009

Kirjoita nimesi ja opiskelijanumerosi jokaiseen vastauspaperiin.

Tehtävissä, joissa pyydetään algoritmia, voit halutessasi käyttää muuta pseudokoodityyliä kuin kurssilla käytetty ja voit halutessasi myös käyttää esim. Javaa.

Kustakin tehtävästä voi saada 12 pistettä.

Kokeessa saa olla mukana A4-kokoinen ”lunttilappu”.

1. Tarkastelemme Catalanin lukuja (Catalan numbers) $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$, kun $n \geq 0$. Catalanin luvut kertovat miten monella eri tavalla voidaan oikein sisentää n paria sulkuja. Esimerkiksi kun $n = 2$, sulut voivat olla muodossa ()() ja (()), eli tapoja on 2; $C_2 = 2$. Catalanin luvut kertovat myös montako n-solmuista binäärihakupuuta on olemassa.

   (a) Kirjoita rekursiivinen funktio Catalanin luvun laskemiseksi. Mikä on funktion aika- ja tilavaativuus?

   (b) Kirjoita iteratiivinen funktio Catalanin luvun laskemiseksi. Mikä on funktion aika- ja tilavaativuus?

   Huomautus: Catalanin luvuille on olemassa yksinkertainen kaava $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$, mutta sitä et saa tässä käyttää hyväksesi.

2. Selitä hajautuksen pääperiaateet: Mihin hajautus tarvitaan? Mikä on yhteentörmäys? Ketjuttaminen vastaan avoin hajautus: mitä se on ja milloin toinen on parempi? Tässä ei tarvitse esittää kaavoja, yleisesittely riittää. Sopiva määrä tekstiä on 1 – 2 sivua keskikokoisella käsialalla konseptipaperin joka rivillä kirjoitettuna.

3. Jos pikajärjestämisessä valitaan $\textsc{Partition}(A, p, r)$-funktion jakoalkioksi mediaani luvuista $A[p]$, $A[\lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor]$ ja $A[r]$, niin millainen (helpoin, vaikein, jotain siltä väliltä) ovat seuraavat tapaukset pikajärjestämiselle? Selitä miksi.

   (a) [*6 pistettä*] Kaikki luvut ovat erilliset ja valmiiksi nousevassa suuruusjärjestyskessä, esimerkiksi $[1, 2, 3, 4]$.

   (b) [*6 pistettä*] Kaikki luvut ovat erilliset ja alenevassa suuruusjärjestyksessä, esimerkiksi $[4, 3, 2, 1]$.

4. k-puu on binääripuun yleistys: solmuilla on lapsia $0, 1, \ldots, k$ kappaletta. Täysi k-puu on sellainen k-puu, joiden solmuilla on lapsia 0 tai k kappaletta. Johda kaava täyden k-puun solmujen lukumäärälle korkeuden funktiona.

   Huomautus: Vastaukseksi tulee alaraja ja yläraja.

5. Olkoon annettuna suuntaamaton verkko $G = (V, E)$ ja kaksi verkon solmua v ja w. Anna algoritmi, joka laskee montako lyhintä polkua on v:n ja w:n välillä. Huomaa, että algoritmin ei tarvitse luetella polut, vain antaa polkujen lukumäärän. Algoritmin suoritusajan tulee olla $O(n + m)$, kun verkossa on n solmua ja m kaarta.