LUKIOMATEMATIIKAN KERTAUSPIIRI
MALLIVASTAUKSET 1
SYKSY 2006

1. Hahmottele funktioiden kuvaajat.

Kuvaajat omalla sivullaan lopussa.

2. Laske lausekkeiden arvot

a) $(-2)^5 = -32$
b) $-2^2 = -4$
c) $b^{-3} = \dfrac{1}{b^3}$
d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$
e) $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$
f) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$
g) $\ln \dfrac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3 \ln e = -3 \cdot 1 = -3$
h) $\log_5 125 = 3$
i) $e^{\ln 4} = 4$
j) $e^{-\ln a} = \dfrac{1}{e^{lna}} = \dfrac{1}{a}$
k) $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Trigonometristen funktioiden tarkat arvot löytyvät esim. MAOL-taulukosta.)
l) $\tan \dfrac{8\pi}{3} = \tan (\dfrac{8\pi}{3} - 2\pi) = \tan \dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ (Tangenttifunktion jaksollisuus)

3. Sievennä

a) Käytetään binomin neliön kaavaa (ks. esim MAOL): $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = x - 3$

b) Sievennetään osoittaja ja nimittäjä tulomuotoon. Tulomuodon voi selvittää esim. etsimällä nollakohdat.
$\dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{x-2}{2x+1}$
Huomaa, että alkuperäinen lauseke ei ole määritelty kohdassa $x = -1$ vaikka sievennetty muoto onkin.

c) $\log_k \dfrac{k^6\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}} = \log_k k^6\sqrt{k} - \log_k \sqrt{k^3} = \log_k k^{\frac{13}{2}} - \log_k k^{\frac{3}{2}} = \dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

d) $e^{\ln a^2} e^{\ln(b+1)} = a^2(b+1)$

e) $2 \ln a - \ln (b+1) = \ln a^2 - \ln (b+1) = \ln \dfrac{a^2}{b+1}$

4. Millä x:n arvoilla lausekkeet ovat määriteltyjä?

a) Juurifunktion arvo $\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$. Siispä $\sqrt{x-6}$ on määritelty, kun $x - 6 \geq 0$ eli $x \geq 6$.
b) Murtolauseke on määrittelemätön nimittäjän nollakohdissa $x = 4$ ja $x = -3$.
c) Logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla. Täten $\ln(x+3)$ on määritelty, kun $x+3 > 0$ eli $x > -3$.

5. Etsi funktioiden nollakohdat

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -(3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -1$

b) $g(x) = e^x - 5 = 0$

$e^x = 5$ Otetaan luonnollinen logaritmi molemmista puolista

$x = \ln 5$

c) $h(x) = \ln(x-2) = 0$ Otetaan eksponenttifunktion arvo puolista

$e^{\ln(x-2)} = e^0$

$x - 2 = 1$

$x = 3$

6. Laske käänteisfunktion f^{-1} lauseke, kun

a) $f(x) = 5x - 4 = y$

$5x = y + 4$

$x = \frac{y}{5} + \frac{4}{5}$

Siis käänteisfunktio $f^{-1}(y) = \frac{y}{5} + \frac{4}{5}$

b) $f(x) = x^2 - 2 = y$

$x^2 = y + 2$

$x = \pm\sqrt{y+2}$ Negatiivinen vaihtoehto ei kelpaa, koska oletimme $x \geq 0$.

$f^{-1}(y) = \sqrt{y+2}, \quad y \geq -2$

c) $f(x) = e^{x+3} = y$

$\ln e^{x+3} = \ln y$

$x + 3 = \ln y$

$x = \ln y - 3$

$f^{-1}(y) = \ln y - 3, \quad y > 3$

7. Muunna asteet radiaaneiksi ja päinvastoin.

a) $\frac{7\pi}{72}$ b) $\frac{17\pi}{10}$ c) $-\frac{43\pi}{45}$ d) $135°$ e) $114\frac{6}{11}°$ f) $-216°$

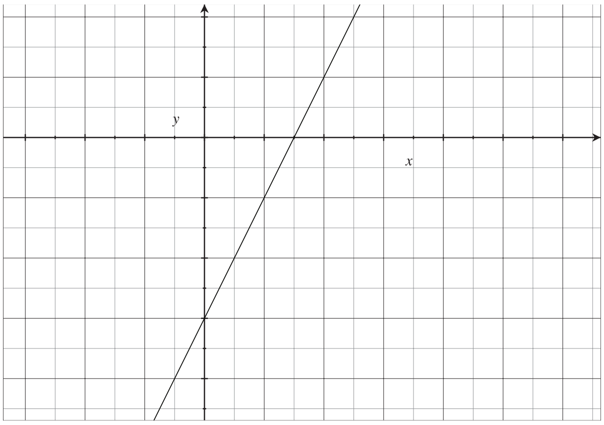
8. Määritellään funktio f seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$$

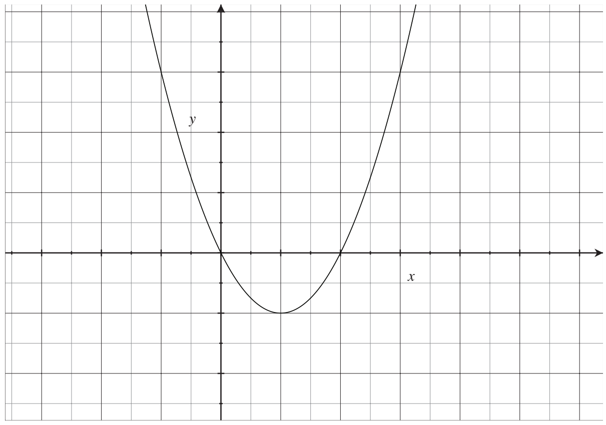
Millainen funktio f on? Mitä osaat sanoa sen kuvaajasta?

Koska jokaisella reaalilukuvälillä on äärettömästi sekä rationaalisia että irrationaalisia lukuja, saa funktio f arvokseen nolla äärettömän monessa pisteessä millä tahansa välillä. Vastaavasti se saa arvokseen jokaisella välillä nollasta poikkeavan luvun äärettömän monta kertaa. Funktio f ei myöskään ole jatkuva missään pisteessä, lukuunottamatta kohtaa $x = 0$, jossa se itse asiassa on jopa derivoituva.

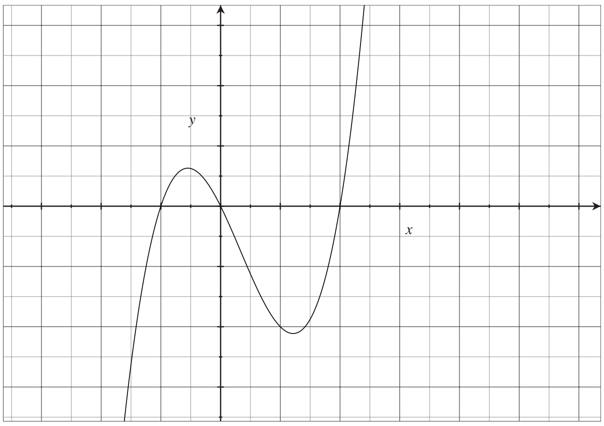
1a)



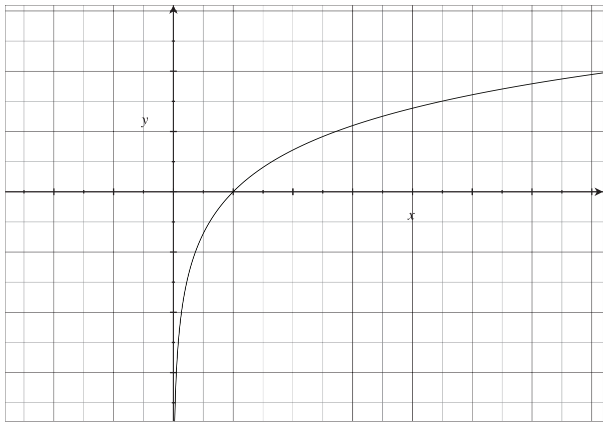
1b)



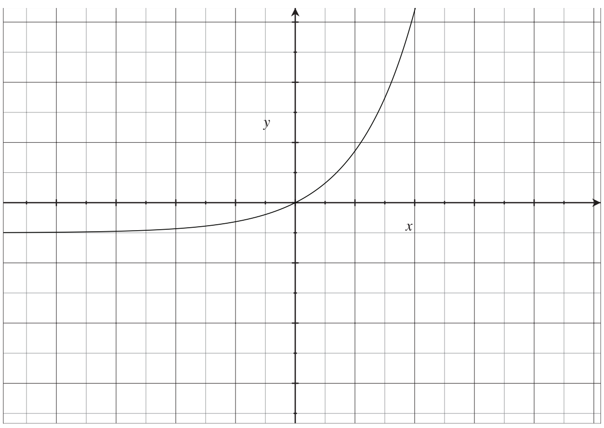
1c)



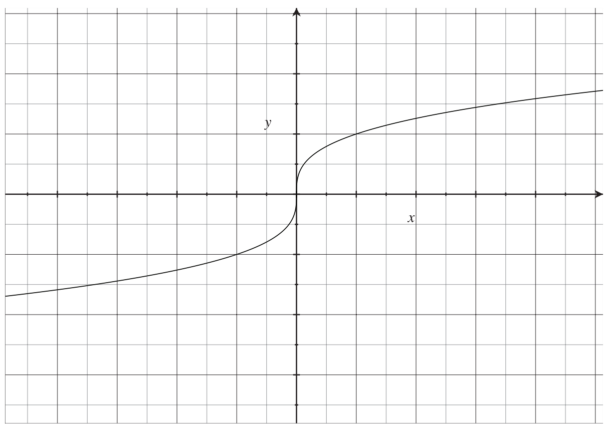
1d)



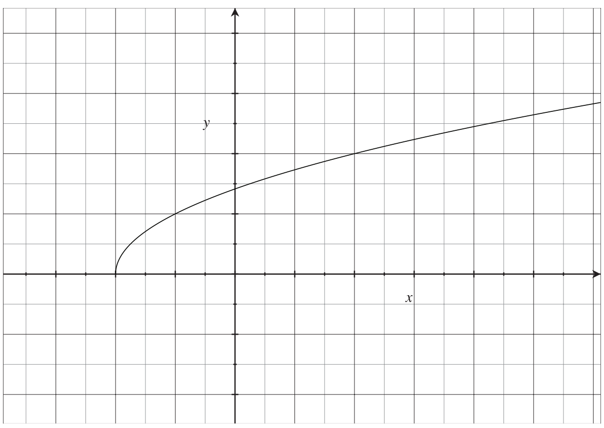
1e)



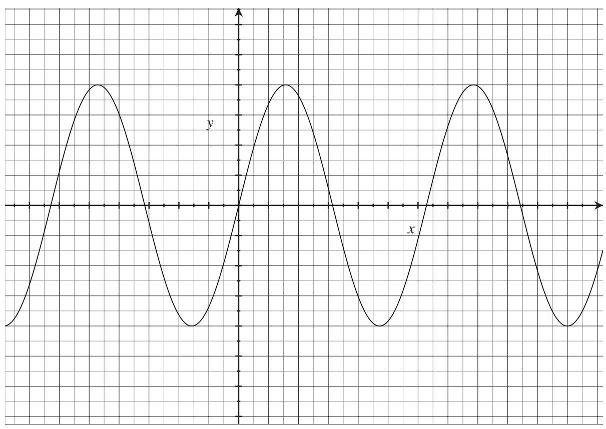
1f)



1g)



1h)



1i)