

## Mallivastaukset 2

1 a)  $-x^2 + x - 1 < 0$

Ratkaistaan nollakohdat:

$$-x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{-2} \quad \text{ei määritelty}$$

Paraabeli  $-x^2 + x - 1$  ei siis leikkaa  $x$ -akselia.  
Koska  $x^2$ -termin kerroin on negatiivinen,  
paraabeli aukeaa alaspäin:



Tästä voimme päätellä, että  
 $-x^2 + x - 1 < 0$  toteutuu kaikilla  
 $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $x^3 + 4x^2 + x < 0$

Ratkaistaan nollakohdat:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

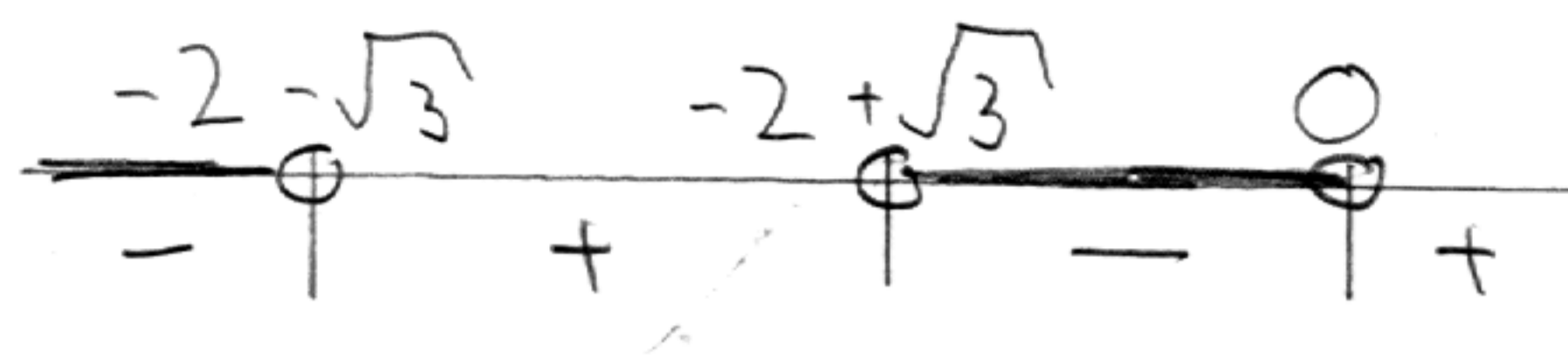
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{3}$$

Eli: nollakohdat  $x = -2 - \sqrt{3}$ ,  $x = -2 + \sqrt{3}$  ja  $x = 0$

Huomataan, että  $-2-\sqrt{3} < -2+\sqrt{3} < 0$

Tehdään merkkikaavio funktiosta  $x^3 + 4x^2 + x$ :



(Polynomifunktio vaihtaa merkkiä vain nollakohtissa, joten voidaan laskea onko funktio positiivinen vai negatiivinen milläkin välillä:

$$f(-4) = -4 < 0$$

$$f(-2) = 6 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} < 0$$

$$f(1) = 6 > 0$$

Siis ratkaisu:  $x < -2-\sqrt{3}$  tai  $-2+\sqrt{3} < x < 0$ .

$$c) (x^2 - 3x + 1)^4 = 1$$

molemmat puolet  $> 0$ , voidaan ottaa neljäs juuri.

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{(x^2 - 3x + 1)^4} = \pm \sqrt[4]{1}$$

kaksi vaihtoehtoa!

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$\text{tai } x^2 - 3x + 1 = -1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 3$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = 2$$

Ratkaisut:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$

d)  $\sqrt{x+6} + x = 0$  Määritelty vain kun  $x \geq -6$

$$\sqrt{x+6} = -x \quad || (\ )^2$$

$$x+6 = x^2$$

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$x = 3$  tai  $x = -2$  Mahdolliset ratkaisut

Tarkastetaan, ovatko nämä oikeita ratkaisuja:

$x = 3: \sqrt{3+6} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 6$  ei ratkaisu!

$x = -2: \sqrt{-2+6} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 0$  ratkaisu

Siis yhtälön ratkaisu  $x = -2$

e)  $x = \sqrt{x} + 110$  Määritelty kun  $x \geq 0$

$$x - 110 = \sqrt{x} \quad || (\ )^2$$

$$x^2 - 220x + 12100 = x$$

$$x^2 - 221x + 12100 = 0$$

$$x = \frac{221 \pm \sqrt{(-221)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12100}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{221 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{221 \pm 21}{2}$$

$x = 100$  tai  $x = 121$

Tarkistus:

$$\sqrt{100} + 110 = 120 \neq 100$$

$$\sqrt{121} + 110 = 11 + 110 = 121$$

Siis ratkaisu  $x = 121$

f)  $\frac{x}{x-3} = \frac{x-3}{x}$  ei määritelty, kun  $x=3$  tai  $x=0$   
 kerrotaan puolet  $x(x-3)$ :lla

$$\Leftrightarrow x \cdot x = (x-3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$x=0$  ei voi olla ratkaisu, eli ainut ratkaisu on  $x = -\frac{3}{2}$

g)  $\left(\frac{x}{1+3x} + 1\right)^4 = 1 \quad || \sqrt[4]{\quad}$ ;  $x \neq -\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+3x} + 1 = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+3x} = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{x}{1+3x} = -2$$

$$x=0$$

$$x = -2 - 6x$$

$$7x = -2$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

Ei:  $x=0$  tai  $x = -\frac{2}{7}$

h)  $\frac{2x}{3} < \frac{1-3x}{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2} < 0$$

Nimittäjän nollakohta  $x=2$

lausekkeen nollakohdat:

$$f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2} = 0$$

lavennetaan samannimisiksi

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x-2)}{3(x-2)} - \frac{3-9x}{3(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x + 9x - 3}{3(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 5x - 3}{3(x-2)} = 0$$

lauseke nolla vain  
kun osoittaja nolla

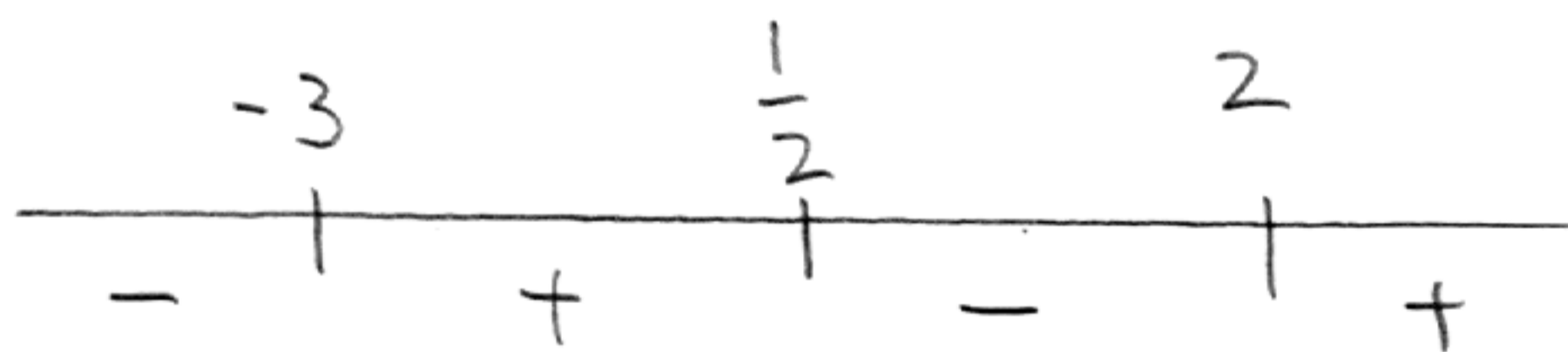
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -3$$

Tehdään merkkikaavio; rationaalifunktio voi vaihtaa merkkiä nollakohdissa tai nimittäjän nollakohdissa.



$$f(4) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = -2 < 0$$

$$f(3) = 10 > 0$$

Ratkaisu:  $x < -3$  tai  $\frac{1}{2} < x < 2$