Lukiomatematiikan kertauspiiri
Mallivastaukset 4
Syksy 2006

1. $f(x) = e^x \sin x$
$g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$
f on g:n integraalifunktio, jos $f' = g$, suoraan integraalifunktion määritelmän nojalla
$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = g(x)$.
Vastaus tehtävän kysymykseen: <u>On.</u>

2. Funktio on aina derivaattafunktionsa integraalifunktio (vrt. määritelmä)
Siis f on esim. funktion $f'(x) = 2xe^{x^2}$ integraalifunktio.

3. a) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C$

c) $\int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = 2\int x^{-2} dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$

d) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + C = 4\sqrt{x} + C$

e) $\int (2\sin x + \cos 3x - 2\sin 6x) dx$

$= 2\int \sin x\,dx + \int \cos 3x\,dx - 2\int \sin 6x\,dx$

$= 2\cdot(-\cos x) + \frac{1}{3}\sin 3x - 2\cdot\left(\frac{1}{6}(-\cos 6x)\right) + C$

$= -2\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 6x + C$

Huomaa sisäfunktio:
$D \sin ax = \underline{a} \cos ax$
$D \underline{\frac{1}{a}} \sin ax = \cos ax$

f) $\int (5x-1)^3 dx = \int \frac{5}{5}(5x-1)^3 dx$

$= \frac{1}{5}\int 5(5x-1)^3 dx$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-1)^4}{4} + C$

$= \frac{1}{20} \cdot (5x-1)^4 + C$

yhdistetty funktio:
$f'(x) = x^3$
$g(x) = 5x-1$
$g'(x)f'(g(x)) = 5(5x-1)^3$

g) $\int \frac{1}{5x-1} dx = \frac{1}{5}\ln|5x-1| + C$

yhdistetty funktio:
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = 5x-1$

h) $\int x(x^2+2)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+2)^4}{4} + C = \frac{1}{8}(x^2+2)^4 + C$

i) $\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$

j) $\int (\cos x)(\sin^3 x) dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

k) $\int \frac{3+e^{3x}}{e^x} dx = \int \left(\frac{3}{e^x} + e^{2x}\right) dx$

$= \int 3e^{-x} dx + \int e^{2x} dx = -3e^{-x} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

4 a) $\int_{-2}^{3} x^5 dx = \Big/_{-2}^{3} \frac{x^6}{6} = \frac{3^6}{6} - \frac{(-2)^6}{6} = \frac{665}{6}$

b) $\int_0^{2\pi} \sin 4x \, dx = \Big/_0^{2\pi} \frac{\sin 4x}{4} = \frac{\sin 0}{4} + \frac{\sin 8\pi}{4} = 0 + 0 = 0$

c) $\int_0^1 x(\sqrt{x}+1)\,dx = \int_0^1 (x\sqrt{x}+x)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int_0^1 x\,dx$

$= \Big/_0^1 \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \Big/_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{2}{5}1^{\frac{5}{2}} - 0 + \frac{1^2}{2} - 0$

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

d) $\int_1^e \frac{x+2}{x}\,dx = \int_1^e \left(1+\frac{2}{x}\right)dx = \int_1^e 1\cdot dx + \int_1^e \frac{2}{x}\,dx$

$= \Big/_1^e x + \Big/_1^e 2\ln|x| = e-1+2\ln e - 2\ln 1$

$= e-1+2 = e+1$

e) $\int_0^1 xe^{x^2} = \Big/_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$

f) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2}$ Tästä tehtävästä jäi vahingossa puuttumaan sulut, eli oikeasti lausekkeen piti olla $\frac{1}{(1-x)^2}$. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2}$ ei sinällään edes ole määrätty integraali, koska $\frac{1}{1-x^2}$ ei ole määritelty pisteessä $x=-1$.

g) $\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})\,dx = \int_{-1}^1 (e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x})\,dx$

$= \int_{-1}^1 e^{2x}\,dx + \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx = \Big/_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{2} + \Big/_{-1}^1 -\frac{e^{-2x}}{2} + \Big/_{-1}^1 2x$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2} + 2 - 2 = e^2 - e^{-2} = e^2 - \frac{1}{e^2}$