Lukiomatematiikan kertauspiiri
Mallirathkaisut 5
Syksy 2006

1. Väite $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}^+$

Tod. Induktiolla:

1° Alkuaskel. Osoitetaan, että väite pätee tapauksessa $n=1$

$n^2 = 1^2 = 1$, eli alkuaskel ok.

2° Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus, että jollain $p\in\mathbb{Z}^+$ $1+3+5+\ldots+(2p-1)=p^2$.
Osoitetaan, että tällöin väite pätee, kun $n=p+1$:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2p-1)}_{\text{tämä on induktio-oletuksen nojalla } p^2.}+(2(p+1)-1)$$

$$= p^2+(2(p+1)-1) = p^2+2p+1$$

(binom. kaava)
$$= (p+1)^2.$$ Induktioaskel ok.

Induktioperiaatteen nojalla kohdista 1° ja 2° seuraa väite. $\square$

2. Väite $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!} \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}^+$

Tod. Induktiolla

1° Alkuaskel: $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2!}=\frac{1}{2} \\ 1-\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$ Samat, siis alkuaskel ok.

2° <u>Induktioaskel</u>:

induktio-oletus: jollain $p \in \mathbb{Z}^+$ $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{p}{(p+1)!} = 1-\frac{1}{(p+1)!}$

Osoitetaan, että väite pätee tapauksessa $n = p+1$

$$\underbrace{\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{p}{(p+1)!}}_{\text{induktio-oletuksen nojalla } 1-\frac{1}{(p+1)!}} + \frac{p+1}{(p+2)!} = 1-\frac{1}{(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!}$$

$$= 1 - \frac{p+2}{(p+2)(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} = 1 - \frac{p+2}{(p+2)!} + \frac{p+1}{(p+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(p+2)!}$$ Induktioaskel ok.

1° ja 2° ja induktioperiaate $\Rightarrow$ väite $\square$

<u>Väite</u>: $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

<u>Tod</u>: Induktiolla

1° <u>Alkuaskel</u>: $n=1$

$1^3 = 1$

$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ Alkuaskel ok.

2° <u>Induktioaskel</u>:

Induktio-oletus: väite pätee jollain $p \in \mathbb{Z}^+$

$n = p+1$

$$\underbrace{1^3+2^3+\dots+p^3}_{\text{ind. ol.} \Rightarrow = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2} + (p+1)^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 + (p+1)^3$$

$$= \frac{p^2}{4}(p+1)^2 + p(p+1)^2 + (p+1)^2 = \frac{1}{4}(p^2+4p+1)(p+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}(p+2)^2(p+1)^2 = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2$$ induktioaskel ok.

1° & 2° $\Rightarrow$ väite $\square$

4. $F_1 = F_2 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, kun $n \in \mathbb{Z}^+$

Väite: $F_n < 2^n$

Tod: Induktiolla

1° Alkuaskel: $n=1$

$F_n = F_1 = 1 < 2 = 2^1 = 2^n$ ok.

2° Induktioaskel

Induktio-oletus: ol. $p \in \mathbb{Z}^+$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}^+$, joilla pätee $k \leq p+1$, $F_k < 2^k$.

(Huomaa: tämä on siis toisen eli vahvan induktioperiaatteen mukainen induktio-oletus.)

Osoitetaan, että tällöin väite pätee, kun $n = p+2$

$$F_{p+2} = F_{p+1} + F_p \underset{\substack{\text{induktio-}\\ \text{oletuksen nojalla}}}{<} 2^{p+1} + 2^p$$

$$= 2 \cdot 2^p + 2^p = (2+1)2^p = 3 \cdot 2^p < 4 \cdot 2^p = 2^{p+2}$$

ok.

1° & 2° $\Rightarrow$ väite $\square$