Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2
1.4.2008

1. Olkoon $H \leq G$ ja olkoot $g_1, g_2 \in G$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (a) $g_1 H = g_2 H$
   (b) $g_1 \in g_2 H$
   (c) $g_1^{-1} g_2 \in H$.

2. Tarkastellaan yhteenlaskuryhmää $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Tämä tekijäryhmä koostuu alkioista $[0], \ldots, [14]$, joille pätee $[a] = [b]$ jos ja vain jos $a - b$ on jaollinen luvulla 15. Ryhmällä on normaali aliryhmä $H = \{[0], [5], [10]\}$. Etsi kaikki H:n sivuluokat ja esitä tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{15}/H$ laskutoimitustaulu.

3. Olkoon G äärellinen ryhmä ja H sen jokin aliryhmä. Merkitään ryhmien G ja H alkioiden lukumääriä $|G|$ ja $|H|$ sekä H:n vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärää $[G : H]$. Totea, että myös H:n oikeanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä on $[G : H]$, ja todista nk. *Lagrangen lause*, jonka mukaan luku $|H|$ jakaa lukun $|G|$ ja $|G|/|H| = [G : H]$. Päättele tästä vielä, että jos $|H| = |G|/2$, niin H on normaali.

   Ohje. Voit käyttää hyväksi viime harjoitusten tehtävässä 3 osoitettua tietoa, että kuvaus $\sigma_g : G \to G$, $\sigma_g(x) = gx$ on bijektio kaikilla $g \in G$. Päättele, että kyseinen kuvaus on myös bijektio $H \to gH$, ja muista, että aliryhmän sivuluokat muodostavat koko ryhmän osituksen.

4. Vähintään kaksialkioista ryhmää kutsutaan *yksinkertaiseksi*, jos sillä ei ole lainkaan epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä. Osoita, että neljän alkion parillisten permutaatioiden ryhmä
   $$A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$$
   ei ole yksinkertainen. (Itse asiassa A_n on yksinkertainen, jos ja vain jos $n = 3$ tai $n \geq 5$.)

5. Osoita, että ryhmä $\mathbb{R}_a$ on vaihdannainen.

6. Luennolla käsitellyn 3-syklin avulla voidaan muodostaa muitakin ryhmän $\mathbb{R}_p$ parillisia permutaatioita. Esitä seuraavat permutaatiot perussiirtojen ja niiden käänteissiirtojen tulona, kun palat on numeroitu luennolla esitetyssä järjestyksessä:
   (a) (368), (b) $(16)(38)$, (c) $(18)(36)$.