Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3
8.4.2008

1. Olkoon G ryhmä, H sen osajoukko ja $g \in G$. Osoita:
   a) ${}^gH \leq G$ jos ja vain jos $H \leq G$
   b) ${}^gH \trianglelefteq G$ jos ja vain jos $H \trianglelefteq G$.

2. Osoita, että jos A ja B ovat konjugaattiluokkia, joille pätee $A \cap B \neq \emptyset$, niin $A = B$. Eri konjugaattiluokat ovat siis erillisiä.

3. Olkoon $n \geq 5$. Osoita, että jos $N \trianglelefteq A_n$ ja N sisältää jonkin 3-syklin, se sisältää itse asiassa kaikki A_n:n 3-syklit. Päättele tästä, että $N = A_n$.

   Ohje. Konjugoi 3-sykliä jollain sopivalla parillisella permutaatiolla.

4. Oletetaan, että $N \trianglelefteq A_n$. Tarkista seuraavat väitteet.
   a) Jos permutaation π syklityyppi on $(n-m-1, m, 1)$, niin π^2 on 3-sykli.
   b) Jos $\pi = (a\ b)(a'\ b') \in N$ ja $c \notin \{a, b, a', b'\}$, niin N sisältää 3-syklin $(a\ b\ c)$.
   c) Jos $\pi \in N$, missä π on vähintään neljän erillisen vaihdon tulo eli $\pi = (a_1\ b_1)(a_2\ b_2)(a_3\ b_3)(a_4\ b_4) \circ \sigma$, niin N sisältää kahden 3-syklin tulon $(a_1\ a_3\ b_2)(a_2\ b_3\ b_1)$.
   d) Jos $\pi \in N$, missä π:n sykliesitys sisältää vähintään kaksi erillistä 3-sykliä eli $\pi = (a\ b\ c)(a'\ b'\ c') \circ \sigma$, niin N sisältää permutaation $(a\ a'\ c\ b\ c') \circ \sigma$.
   e) Jos $\pi \in N$, missä π:n sykliesitys sisältää vähintään neljän pituisen syklin eli $\pi = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots) \circ \sigma$, niin N sisältää 3-syklin $(a_1\ a_2\ a_4)$.

   Vihje. Yritä kohdissa (b)–(e) löytää permutaatio π', joka saadaan konjugoimalla permutaatiosta π ja jolle pätee $\pi\pi' = \tau$ tai $\pi^{-1}\pi' = \tau$, missä τ on kulloinenkin ryhmään N kuuluvaksi osoitettava permutaatio.

5. Käymällä läpi kaikki mahdolliset parillisen permutaation syklityypit ja käyttämällä hyväksi kahta edellistä tehtävää osoita, että jos $n \geq 5$, niin ryhmällä A_n ei ole muita normaaleja aliryhmiä kuin A_n ja $\{\mathrm{id}\}$. Täten A_n on yksinkertainen, kun $n \geq 5$.

6. Tarkastellaan Rubikin paikkaryhmää $\mathbb{R}_p$. Numeroidaan kuution nurkkapalat oheisen kuvan mukaisesti.

a) Osoita parillisuusperustelun avulla, että neljän nurkkapalan sykli (1234), missä mikään muu pala ei liiku, ei ole mahdollinen siirto.

b) Oletetaan, että palat on numeroitu niin, että luennoilla esitelty 3-sykli on $\sigma = (123)$. Esitä siirto (12)(78) permutaation σ sekä sen konjugaattien ${}^\tau\sigma$ tulona. (Kirjoita konjugaatit perussiirtojen avulla.)