

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Harjoitus 4  
15.4.2008

1. Tarkastellaan esimerkissä 4.9 esiintynyttä neliön symmetriaryhmää

$$D_8 = \{ \text{id}, (1234), (13)(24), (1432), \\ (12)(34), (24), (14)(23), (13) \} \leq S_4.$$

Etsi jokaisen alkion  $x \in D_8$  keskittäjä ja laske indeksi  $[D_8 : C_G(x)]$ . Vertaa kutakin indeksiä alkion  $x$  konjugaattiluokan kokoon. Mitkä alkiosta kuuluvat ryhmän keskukseen?

2. Osoita, että ryhmän  $G$  keskus sekä kaikkien alkoiden keskittäjät ovat  $G$ :n aliryhmiä. Näytä lisäksi sopivien vastaesimerkkien avulla, että keskittäjät eivät välttämättä ole vaihdannaisia tai normaaleja.
3. Olkoon  $G$  ryhmä. Merkitään  $C = \zeta G$ . Oletetaan, että tekijäryhmä  $G/C$  on syklinen eli että sen kaikki alkiot saadaan jonkin sivuluokan  $xC$  potensseina. Osoita, että ryhmä  $G$  on vaihdannainen.

*Vihje:* Jokainen sivuluokka on muotoa  $(xC)^n = x^n C$ .

4. Osoita, että Rubikin ryhmän keskus sisältää vain kaksi alkioita, joista toinen on siirto, joka kääntää kaikki särmäpalat toiseen asentoon eikä liikuta mitään paloja paikaltaan.

*Neuvo:* Keskukseen kuuluvat ne alkiot, jotka eivät muutu missään konjugoinneissa. Näytä sopivilla siirroilla, että kaikki paloja liikuttavat siirrot voidaan konjugoida liikuttamaan paloja toisella tavalla, että nurkkapaloja pyörittävät siirrot saadaan konjugoimalla pyörittämään nurkkapaloja toiseen suuntaan ja että jos yksikin särmäpaloista kääntyy, saadaan konjugoimalla joku toinen kääntymään.

5. Osoita, että neliön symmetriaryhmä  $D_8$  (ks. tehtävä 1) ei ole minkään aliryhmiensä suora tulo.
6. Luentojen määritelmän mukaan ryhmän  $G$  aliryhmät  $H$  ja  $K$  muodostavat sisäisen suoran tulon, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- 1)  $hk = kh$  kaikilla  $h \in H$  ja  $k \in K$
- 2)  $H \cap K = \{e\}$ , missä  $e$  on  $G$ :n neutraalialkio.

Luennolla todistettiin myös, että sisäinen suora tulo toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1')  $H$  ja  $K$  ovat  $G$ :n normaaleja aliryhmiä
- 2') jokaisella  $g \in G$  on yksikäsitteinen esitys  $g = hk$ , missä  $h \in H$  ja  $k \in K$ .

Osoita, että sisäisen suoran tulon määritelmässä voidaan korvata ehto 1) ehdolla 1') ja ehto 2) ehdolla 2') (jompikumpi tai molemmat).