

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5
22.4.2008

Tehtävä 6 on toisella sivulla.

1. Olkoot G_1 ja G_2 ryhmiä, neutraalialkioinaan e_1 ja e_2 . Osoita, että tekijäryhmä $(G_1 \times G_2)/(G_1 \times \{e_2\})$ on isomorfinen ryhmän G_2 kanssa.

Vihje. Tutki kyseisen tekijäryhmän sivuluokkia ja määrittele sopiva, yksinkertainen kuvaus φ ryhmältä G_2 tekijäryhmälle.

2. Olkoon G_i jokin ryhmä jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Merkitään kunkin ryhmän neutraalialkiota e_i . Ryhmien G_i *ääretön* ulkoinen suora tulo $\prod_{i=0}^{\infty} G_i$ koostuu jonoista (g_0, g_1, g_2, \dots) , joissa $g_i \in G_i$ jokaisella i ja joille pätee lisäksi seuraava oletus:

$$g_i \neq e_i \quad \text{vain äärellisen monella indeksillä } i. \quad (*)$$

Ääretön sisäinen suora tulo puolestaan määritellään samalla tavoin kuin äärellisenkin (ks. luentomateriaalin huomautus 5.6).

Osoita, että ääretön ulkoinen suora tulo on ryhmä. Näytä lisäksi, että ääretön ulkoinen suora tulo on joidenkin aliryhmiensä (ääretön) sisäinen suora tulo. Mihin tarvitaan oletusta (*)?

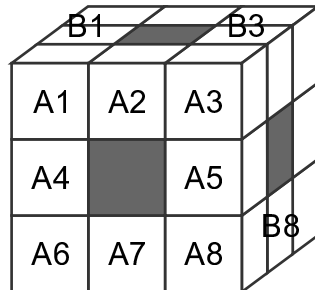
Myös ilman oletusta (*) voidaan muodostaa tuloryhmä, ns. *rajoittamaton* ulkoinen tulo. Jos ryhmät G_i ovat epätriviaaleja, niin suora ja rajoittamaton tulo eivät ole isomorfisia. Osaatko sanoa, miksi?

3. Olkoon p jokin alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_{p^2} = \{[0], [1], \dots, [p^2 - 1]\}$ ei ole minkään kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora tulo.
4. Osoita, että neliön symmetriaryhmä D_8 (ks. edellinen harjoitus ja luento-esimerkki 4.9) voidaan muodostaa tasan kolmella eri tavalla kahden epätriviaalin aliryhmänsä puolisuorana tulona.
5. Olkoon $n > 2$. Osoita, että S_n voidaan kirjoittaa kahden epätriviaalin aliryhmänsä puolisuorana tulona.

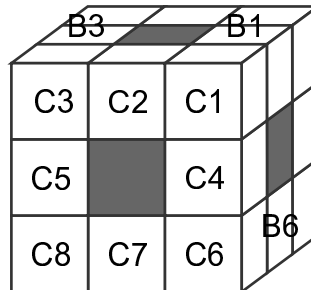
Vihje. Jokaisessa symmetrisessä ryhmässä on aliryhmä, jonka indeksi on 2.

KÄÄNNÄ

6. Merkitään Rubikin kuution palat perusasemassa oheisen kuvan mukaisella tavalla kirjaimin A1, ..., A8, B1, B3, B6, B8, C1, ..., C8. Sininen sivu on ylöspäin ja keltainen sivu osoittaa katsojaan päin.

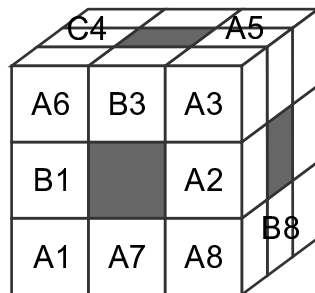


edestä

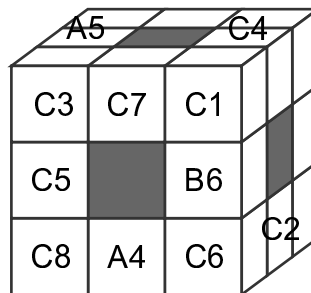


takaa

Esitä siirtosarja, jolla alla olevan kuvan mukaisesta tilanteesta lähtien saadaan kuution palat palautettua perusasemaan. Perusta ratkaisusi opittuihin 3-sykleihin ja niiden konjugaatteihin (sekä mahdollisesti yhteen ylimääräiseen perussiirtoon).



edestä



takaa

Neuvo. Kannattaa ehkä perusasemasta lähtien yrittää saada kuutio sekoitettua kuvan mukaisella tavalla ja sen jälkeen kääntää siirtosarja toisin päin. Apuna voi käyttää netistä löytyvää kuutiosovelmaa (linkki kurssisivulla).