Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 6
29.4.2008

1. Tarkastellaan ryhmiä A_3 ja $E = (\{1, -1\}, \cdot)$ (vrt. luentojen esimerkkiin 5.9). Muodosta ulkoiset puolisuorat tulot $A_3 \rtimes E$, kun konjugoivana toimintana on
   a) $\varphi_k(\sigma) = \sigma$ kaikilla $k \in E$ ja $\sigma \in A_3$
   b) $\psi_1(\sigma) = \sigma$, $\psi_{-1}(\sigma) = \sigma^{-1}$ kaikilla $\sigma \in A_3$.

   Totea, että a)-kohdan tulos on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_6$ kanssa ja b)-kohdan tulos puolestaan isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa.

2. Osoita, että ulkoinen puolisuora tulo on joidenkin aliryhmiensä sisäinen puolisuora tulo.

3. Osoita, että tuloryhmän $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{ns}$ indeksi Rubikin paikkaryhmässä $\mathbb{R}_p$ on täsmälleen kaksi. Päättele tästä, että Rubikin paikkaryhmä $\mathbb{R}_p$ on isomorfinen ryhmän $(A_8 \times A_{12}) \rtimes E$ kanssa, missä $E = (\{1, -1\}, \cdot)$.

   Ohje: Tutki lemmaa 5.17 ja lausetta 5.18. Jos siirto $(\nu, \sigma) \in \mathbb{R}_p$ kuuluu tuloryhmään $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{ns}$, niin ν ja σ ovat kumpikin mahdollisia siirtoja, samoin niiden käänteisalkiot. Tästä voidaan helposti päätellä, että esimerkiksi perussiirrot eivät voi kuulua tuloryhmään.

4. Olkoon G ryhmä ja olkoot $x, y, z \in G$. Todista seuraavat kommutaattoriyhtälöt:

   i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$

   ii) $[xy, z] = {}^{x}[y, z] \cdot [x, z]$ ja $[x, yz] = [x, y] \cdot {}^{y}[x, z]$

   iii) $[x, y^{-1}] = \left({}^{y^{-1}}[x, y]\right)^{-1}$ ja $[x^{-1}, y] = \left({}^{x^{-1}}[x, y]\right)^{-1}$

   iv) $[x, y, z] = [x, y] \cdot {}^{z}[y, x]$.

   Vihje: Kannattaa käyttää apuna tunnettuja laskukaavoja sekä muistaa, että konjugointi on homomorfismi, jolle pätee lisäksi ${}^{xy}z = {}^{x}({}^{y}z)$.

5. Oletetaan, että joillain $\sigma, \tau \in S_n$ pätee $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = T$, missä T on kolmen alkion joukko $\{x, \tau(x), \tau^2(x)\}$. Oletetaan lisäksi, että $\tau^3(x) = x$ ja että $T \cap \sigma(T) = \emptyset$. Osoita, että
$$[\sigma, \tau] = \big(x \; \tau^2(x) \; \tau(x)\big) \circ {}^{\sigma}\big(x \; \tau(x) \; \tau^2(x)\big).$$

   Ohje. Tarkastele erikseen, mitä on $[\sigma, \tau](y)$, kun $y \in A$ ja $y \in \sigma(A)$. Koeta piirtää kuvia.

6. Tarkastellaan materiaalin kuvassa 14 näkyvää C-tyyppistä kolmen nurkkapalan kombinaatiota (mitkään kaksi nurkkapalaa eivät ole vierekkäisissä nurkissa). Etsi Rubikin ryhmän siirrot σ ja τ, joiden kommutaattori $[\sigma, \tau]$ on noiden kolmen nurkkapalan 3-sykli.