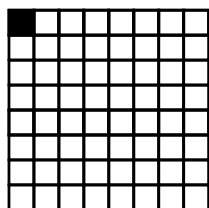
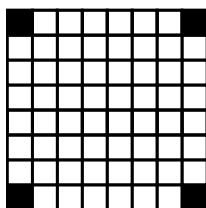


Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 7
6.5.2008

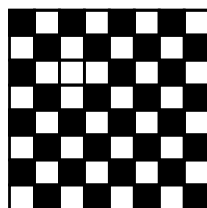
1. Ryhmän G kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää kutsutaan *kommutaattorialiryhmäksi* tai *derivoituksi ryhmäksi* ja merkitään G' . Kommutaattorialiryhmän koko kertoo ryhmän vaihdannaisuudesta. Mitä pienempi on ryhmän keskus, sitä suurempi kommutaattorialiryhmä. Osoita, että symmetrisen ryhmän S_n keskus on triviaali ja $S'_n = A_n$.
2. Olkoon G ryhmä. Osoita, että tekijäryhmä G/G' on vaihdannainen (ks. ed. teht.).
3. Määritä eri palojen kiertymät opituissa nurkka- ja särmäpalojen 3-sykleissä.
4. Tarkastellaan $4 \times 4 \times 4$ -kuutiota. Kuvaile siirtosarja, jolla voidaan vaihtaa jonkin sivutahkon yläreunan molemmat särmäpalat alareunan särmäpalojen kanssa.
Toisin kuin tavallisessa kuutiossa, $4 \times 4 \times 4$ -kuutiossa on mahdollista vaihtaa kahden särmäpalan paikat keskenään. Osoita kuitenkin, että kahden särmäpalan paikkoja ei voi vaihtaa pelkästään sivutahkojen siirroilla. Voit lisäksi miettiä, miten tuo vaihto tehdään keskitahkojen avulla.
Neuvo. Jaa sivutahkon kierto osiin, jotka liikuttavat nurkka-, keski- ja särmäpaloja, ja tutki viimeksi mainitun osan etumerkkiä.
5. Tarkastellaan peliä, jota pelataan 8×8 -ruudukossa. Osa ruuduista on valkoisia, osa mustia. Perussiirroissa valitaan mikä tahansa ruudukon pysty- tai vaakariivistä ja vaihdetaan kaikkien tuolla rivillä olevien ruutujen värit. Tarkoitus on saada kaikki ruudut valkoisiksi.
Osoita, että kuvan asemista A, B ja C lähtien peliä on mahdoton ratkaista.
Neuvo. Etsi sopivia invariantteja. Esimerkiksi asemassa A kannattaa miettiä, miten nurkkaruutujen värit muuttuvat perussiirroissa.



A



B



C

6. Tutki, mikä on pienin siirtojen määrä, joka riittää edellisen tehtävän pelin ratkaisemiseen mistä tahansa asemasta, josta ratkaiseminen on mahdollista.
Vihje. Kannattaa tarkistaa ensin perussiirtojen kommutaattorit.

Muista antaa kurssipalautetta laitoksen palautesivulla.