Jos H_1 ja H_2 ovat ryhmien G_1 ja G_2 aliryhmiä, niin niiden ulkoinen suora tulo on ryhmä, joka sisältyy ryhmään $G_1 \times G_2$. Se on siis kyseisen ryhmän aliryhmä. Osoitetaan seuraavassa lemmassa, että kahden normaalin aliryhmän tulo on myös normaali koko ryhmien tulossa.

Lemma 5.10. *Jos H_1 ja H_2 ovat ryhmien G_1 ja G_2 normaaleja aliryhmiä, niin ryhmä $(H_1 \times H_2)_u$ on normaali ryhmässä $(G_1 \times G_2)_u$.*

Todistus. Olkoot $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ ja $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Tällöin pätee

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}),$$

ja koska H_1 ja H_2 ovat normaaleja, konjugaateille pätee $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H_1$ ja $g_2 h_2 g_2^{-1} \in H_2$. Siispä ${}^{(g_1,g_2)}(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$, joten $H_1 \times H_2$ on normaali. $\square$

Aliryhmien sisäinen tulo poikkeaa ulkoisesta tulosta oikeastaan vain teknisiltä yksityiskohdiltaan. Seuraava lause osoittaa, että nämä käsitteet voidaan samastaa.

Lause 5.11. *Olkoot G_1 ja G_2 ryhmiä. Tällöin $(G_1 \times G_2)_u = (H \times K)_s$ eräillä aliryhmillä $H, K \leq (G_1 \times G_2)_u$. Toisaalta, jos H ja K ovat ryhmän G aliryhmiä, niin $(H \times K)_s \cong (H \times K)_u$.*

Todistus. Todistetaan aluksi ensimmäinen väite. Olkoot siis G_1 ja G_2 jotkin kaksi ryhmää, joiden neutraalialkiot ovat e_1 ja e_2. Tarkastellaan tuloryhmän $(G_1 \times G_2)_u$ aliryhmiä $H = (G_1 \times \{e_1\})_u$ ja $K = (\{e_1\} \times G_2)_u$. Selvästikin $H \cap K = \{(e_1, e_2)\}$. Lisäksi kaikilla $g_1 \in G_1$ ja $g_2 \in G_2$ pätee

$$(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (g_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2),$$

joten aliryhmän H alkiot kommutoivat aliryhmän K alkioiden kanssa. Näin ollen voidaan muodostaa sisäinen suora tulo $(H \times K)_s$. Lisäksi nähdään, että jos $(g_1, g_2) \in (G_1 \times G_2)_u$, niin $(g_1, g_2) = (g_1, e_2)(e_1, g_2)$, missä $(g_1, e_2) \in H$ ja $(e_1, g_2) \in K$. Täten $(H \times K)_s = (G_1 \times G_2)_u$.

Todistetaan sitten toinen väite. Olkoot H ja K ryhmän G aliryhmiä. Määritellään kuvaus $\varphi : (H \times K)_u \to (H \times K)_s$ kaavalla $\varphi(h, k) = hk$ ja osoitetaan, että se on isomorfismi. Jokainen sisäisen suoran tulon alkio on muotoa hk, missä $h \in H$ ja $k \in K$, ja $\varphi(h, k) = hk$, joten kuvaus φ on surjektio. Oletetaan sitten, että $\varphi(h_1, k_1) = \varphi(h_2, k_2)$ joillain $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$. Tällöin siis $h_1 k_1 = h_2 k_2 \in (H \times K)_s$, ja koska lemman 5.5 mukaan jokaisen sisäisen suoran tulon alkion esitys tällaisena tulona on yksikäsitteinen, täytyy olla $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$. Kuvaus φ on siis injektio. Homomorfisuus seuraa siitä, että yhtälö

$$\begin{aligned} \varphi(h_1, k_1) \cdot \varphi(h_2, k_2) &= h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 k_1 k_2 = \varphi(h_1 h_2, k_1 k_2) \\ &= \varphi\big((h_1, k_1)(h_2, k_2)\big) \end{aligned}$$

pätee kaikilla $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$. $\square$

Jos ryhmä G on joidenkin aliryhmiensä H ja K sisäinen suora tulo, sitä voidaan edellisen lauseen nojalla ajatella tuloryhmänä $H \times K$, jonka alkiot ovat pareja (h, k), missä $h \in H$ ja $k \in K$. Jokainen pari (h, k) samastetaan tällöin ryhmän G alkioon hk.

Esimerkki 5.12. Osoitetaan, että jos $n > 2$, ryhmä $A_n \times (\{1, -1\}, \cdot)$ ei ole isomorfinen ryhmän S_n kanssa. Jos näin nimittäin olisi, niin S_n olisi edellisen lauseen nojalla esitettävissä kahden aliryhmänsä B ja C suorana tulona. Nämä aliryhmät ovat molemmat normaaleja, ja toinen niistä sisältää neutraalialkion lisäksi vain yhden alkion: olkoon esimerkiksi $C = \{\mathrm{id}, \sigma\}$. Näytetään, että C ei voi olla normaali.

Koska $\sigma^2 = \mathrm{id}$, koostuu σ:n sykliesitys kokonaan erillisistä vaihdoista. Olkoon yksi näistä vaihdoista (ab). Kun $n > 2$, löydetään joukosta N_n jokin kolmaskin alkio c. Nyt konjugaatin ${}^{(bc)}\sigma$ sykliesityksessä esiintyy vaihto (ac), jota ei ollut σ:n sykliesityksessä. Näin ollen $\sigma \neq {}^{(bc)}\sigma$, joten ${}^{(bc)}\sigma \notin C$. Tästä seuraa, että C ei ole normaali.

Koska ryhmä S_n ei siis sisällä kaksialkioista normaalia aliryhmää, se ei voi olla isomorfinen suoran tulon $A_n \times (\{1, -1\}, \cdot)$ kanssa.

5.2 Tuloryhmät Rubikin ryhmässä

Rubikin kuution rakenteesta johtuen mitkään lailliset permutaatiot eivät voi siirtää nurkkapalaan kiinnitettyä ruutua särmäpalaan tai päinvastoin. Siistä sellaiset siirrot, jotka koskevat vain nurkkaruutuja ovat täysin riippumattomia särmäruutuja liikuttavista siirroitsta, ja on samantekevää, missä järjestyksessä erityyppisiin ruutuihin liittyvät siirrot suoritetaan. Tällaisten siirtojen joukot muodostavat Rubikin ryhmän sisäisen suoran tulon.

Tässä luvussa osoitetaan muutama Rubikin ryhmän rakenteeseen liittyvä lause, joiden avulla voidaan myöhemmin ratkaista kaikki paikkojen ryhmän $\mathbb{R}_p$ asemat. Tehtävän helpottamiseksi tarkastellaan myös Rubikin ryhmän ulkopuolisia ruutujen permutaatioryhmän aliryhmiä. Merkitään kirjaimella N kaikkien nurkkapalojen ruutujen joukkoa ja kirjaimella S kaikkien särmäruutujen joukkoa. Olkoon edelleen S_N kaikkien nurkkaruutujen permutaatioiden ryhmää ja symbolilla S_S vastaavasti kaikkien särmäruutujen permutaatioiden ryhmä. Jos kaikki ruudut numeroidaan luvuilla $1, \ldots, 48$, näiden permutaatioryhmien voidaan ajatella olevan ryhmän S_{48} aliryhmiä.

Edellä mainittujen ryhmien käsittelyä helpottaa, kun otetaan käyttöön *kantajan* käsite. Jos permutaation σ toimii perusjoukossa X, sen kantaja on

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Permutaation kantaja on siis niiden alkioiden joukko, joihin permutaatio vaikuttaa. Nyt voidaan määritellä ryhmät S_N ja S_S kantajan avulla esimerkiksi seuraavasti:

$$S_N = \{\sigma \in S_{48} \mid \operatorname{supp}(\sigma) \subset N\} \quad \text{ja} \quad S_S = \{\sigma \in S_{48} \mid \operatorname{supp}(\sigma) \subset S\}.$$

Osoitetaan nyt, että ryhmät S_N ja S_S ovat toisistaan riippumattomia.

Lause 5.13. *Nurkka- ja särmäruutuja liikuttavat ryhmät muodostavat suoran tulon $S_N \times S_S$.*

Todistus. Ensinnäkin huomataan, että jos σ kuuluu molempiin ryhmiin, niin näiden ryhmien määritelmän mukaan $\operatorname{supp}(x) \subset N \cap S$ eli $\sigma(x) = x$ pätee kaikilla ruuduilla x, jotka eivät ole sekä nurkka- että särmäruutuja. Koska mikään ruutu ei ole kiinni sekä nurkka- että särmäpalassa, pätee $\sigma(x) = x$ kaikilla ruuduilla x, joten $\sigma = \mathrm{id}$.

Olkoot sitten x jokin nurkkapalan ruutu ja y jokin särmäpalan ruutu. Rubikin kuution rakenteen perusteella $\sigma(x) \in N$ ja $\sigma(y) \in S$ kaikilla siirroilla $\sigma \in \mathbb{R}$. Jos nyt $\sigma \in S_N$ ja $\tau \in S_S$, niin

$$\sigma\tau(x) = \underbrace{\sigma(x)}_{\in N} = \tau\sigma(x)$$

ja vastaavasti

$$\tau\sigma(y) = \underbrace{\tau(y)}_{\in S} = \sigma\tau(x).$$

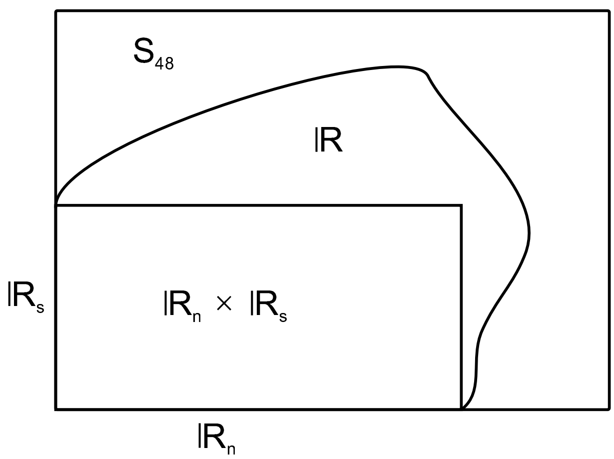
Koska kaikki Rubikin kuution ruudut keskiruutuja lukuunottamatta ovat kiinni joko nurkka- tai särmäpaloissa, nähdään, että $\sigma\tau = \tau\sigma$. Täten S_N ja S_S muodostavat suoran tulon. □

Määritellään vielä erikseen edellä käsiteltyjen ryhmien Rubikin ryhmään sisältyvät osat.

Määritelmä 5.14. Joukkoa $\mathbb{R}_n = \mathbb{R} \cap S_N$ kutsutaan Rubikin *nurkkaryhmäksi* ja joukkoa $\mathbb{R}_s = \mathbb{R} \cap S_S$ puolestaan Rubikin *särmäryhmäksi*.

Koska Rubikin nurkka- ja särmäryhmä ovat kahden ryhmän leikkauksia, ne ovat itsekin ryhmiä ja siten Rubikin ryhmän aliryhmiä, samoin kuin tuloryhmä $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$. Rubikin ryhmässä voidaan siis käsitellä erikseen pelkkiin nurkka- tai pelkkiin reunaruutuihin vaikuttavia siirtoja, mutta näiden yhdistelminä ei välttämättä saada kaikkia mahdollisia siirtoja. Oheisessa kuvassa on esitetty Rubikin ryhmän ja tuloryhmän $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$ suhde.

Jako nurkka- ja särmäryhmiin heijastuu myös aiemmin esiteltyihin ali- ja tekijäryhmiin, ja Rubikin ryhmää voidaan siten edelleen paloitella pienempiin osiin. Todistetaan ensin eräitä yleishyödyllisiä tuloksia.



Kuva 17: Tuloryhmän $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$ asema Rubikin ryhmässä

Lemma 5.15. *Oletetaan, että aliryhmät H ja K muodostavat suoran tulon ryhmässä G ja että N normaali G:ssä. Merkitään $N_H = N \cap H$ ja $N_K = N \cap K$. Seuraavat väitteet pätevät:*

1) *N_H ja N_K ovat tulon $H \times K$ normaaleja aliryhmiä.*

2) *Tekijäryhmät H/N_H ja K/N_K ovat isomorfisia joidenkin ryhmän G/N aliryhmien kanssa. Isomorfismeiksi voidaan lisäksi valita kuvaukset, joille pätee $hN_H \mapsto hN$ ja $kN_K \mapsto kN$.*

3) *Ryhmien H/N_H ja K/N_K kuvat mainitussa isomorfismissa muodostavat suoran tulon ryhmässä G/N.*

Todistus. 1) Lemman 5.5 nojalla H on normaali tulossa $H \times K$. Toisaalta $H \times K$ on ryhmän G aliryhmä ja $N \trianglelefteq G$, joten N on myös normaali tulossa $H \times K$. (Jos nimittäin ${}^gH = H$ kaikilla $g \in G$, niin sama pätee myös kaikilla aliryhmän alkioilla $g \in H \times K$.) Kahden normaalin aliryhmän leikkaus on aina normaali, joten $N_H = H \cap N \trianglelefteq H \times K$. Samalla tavoin voidaan osoittaa, että $N_K \trianglelefteq H \times K$.

2) Ensinnäkin on hyvä huomata, että $N_H \trianglelefteq H$ ja $N_K \trianglelefteq K$, sillä H ja K ovat tulon $H \times K$ aliryhmiä. Osoitetaan isomorfismin olemassaolo ensin aliryhmän H tapauksessa. Olkoon $h \in H$. Jos nyt $hN_H = h'N_H$ jollain $h' \in H$, niin $h^{-1}h' \in N_H$. Erityisesti pätee $h^{-1}h' \in N$ eli $hN = h'N$. Siispä jokaista sivuluokkaa $[h] \in H/N_H$ vastaa yksikäsitteinen sivuluokka $[h] \in G/N$, joten voidaan määritellä kuvaus $\varphi : H/N_H \to G/N$, jolle pätee $\varphi(hN_H) = hN$. Tällainen kuvaus on homomorfismi, sillä kaikilla $h_1, h_2 \in H$ pätee

$$\varphi(h_1N_H) \cdot \varphi(h_2N_H) = h_1N \cdot h_2N = (h_1h_2)N = \varphi(h_1N_H \cdot h_2N_H).$$

Osoitetaan, että kuvaus φ on injektio. Oletetaan, että $h_1N = h_2N$ joillain $h_1, h_2 \in H$. Tällöin pätee $h_1^{-1}h_2 \in N$. Toisaalta H on ryhmä, joten pätee myös $h_1^{-1}h_2 \in H$. Siispä $h_1^{-1}h_2 \in N_H$ eli $h_1N_H = h_2N_H$. Kuvaus φ on siis injektiivinen homomorfismi ryhmälle G/N, joten lähtöryhmä H/N_H on isomorfinen kuvaryhmän $\mathrm{Im}(\varphi) \leq G/N$ kanssa. Toisen aliryhmän K tapauksessa todistus etenee samalla tavalla.

3) Osoitetaan, että kuvaryhmät

$$\{[h] \in G/N \mid h \in H\} \quad \text{ja} \quad \{[k] \in G/N \mid k \in K\}$$

muodostavat suoran tulon ryhmässä G/N. Olkoot $h \in H$ ja $k \in K$. Koska H ja K muodostavat suoran tulon, pätee $hk = kh$. Niinpä

$$hN \cdot kN = (hk)N = (kh)N = kN \cdot hN.$$

Lisäksi, jos $h \in H \cap K$, niin $h = e$, missä e on ryhmän G neutraalialkio. Täten mikä tahansa sivuluokka, joka kuuluu kumpaankin edellä mainituista kuvaryhmistä, on välttämättä $[e] = N$. □

Koska asentoryhmä $\mathbb{R}_a$ on Rubikin ryhmän normaali aliryhmä, ovat leikkausryhmät

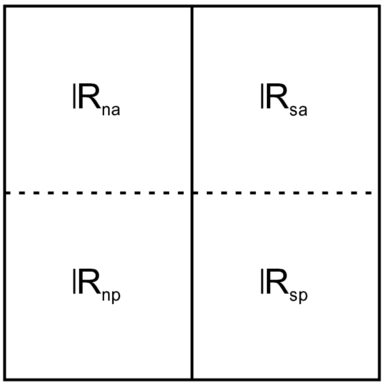
$$\mathbb{R}_{na} = \mathbb{R}_n \cap \mathbb{R}_a \quad \text{ja} \quad \mathbb{R}_{sa} = \mathbb{R}_s \cap \mathbb{R}_a$$

lemman 5.15 kohdan 1) nojalla normaaleja suorassa tulossa $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$. Siispä niiden suhteen voidaan muodostaa tekijäryhmät

$$\mathbb{R}_{np} = \mathbb{R}_n / \mathbb{R}_{na} \quad \text{ja} \quad \mathbb{R}_{sp} = \mathbb{R}_s / \mathbb{R}_{sa}.$$

Näiden tekijäryhmien tulkinta on se, että $\mathbb{R}_{np}$:n alkiot vaihtavat vain *nurkkapalojen paikkoja* ja $\mathbb{R}_{sp}$ alkiot vain *särmäpalojen paikkoja*, niiden asennoista välittämättä. Mainitun lemman kohdan 3) nojalla nämä uudet paikkaryhmät voidaan ajatella Rubikin paikkaryhmän aliryhmiksi, jossa ne muodostavat suoran tulon.

Kuvassa 18 on kaavamaisesti esitetty tuloryhmän $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$ rakenne. Kullakin rivillä vierekkäiset ryhmät muodostavat suoran tulon. Jos siis annettu Rubikin kuution asema sisältyy tuloryhmään $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$, niin nurkkien palat ja asemat voidaan ratkaista särmäpaloista riippumatta. Edelleen sekä nurkka- että särmäpalojen kohdalla voidaan noudattaa aikaisempaa jakoa, jossa ratkaistaan ensin palojen paikat, sitten niiden asennot. Ensin siis ratkaistaan kuviossa alarivin ryhmä, sitten sen yläpuolella oleva ryhmä. Toisinpäin eteneminen olisi mahdotonta, sillä paloilla ei voi ajatella olevan mitään "oikeita asentoja", elleivät ne ole oikeilla paikoillaan. Viimeksi mainitun seikan algebrallinen tulkinta on se, että aliryhmässä on aina neutraalialkio, mutta muissa sivuluokissa ei ole mitään tähän rinnastettavaa toisista poikkeavaa alkiota.



Kuva 18: Tuloryhmän $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$ rakenne

Itse asiassa Rubikin ryhmän paloittelua voitaisiin jatkaa samalla tavalla vieläkin pidemmälle, sillä jokaista yksittäistä palaa koskevat permutaatiot ovat riippumattomia muita paloja koskevista permutaatioista. Näin voitaisiin muodostaa eriasteisia tuloryhmiä, joissa keskityttäisiin erilaisiin palajoukkoihin, ja jakaa nämä ryhmät edelleen paikka- ja asentoryhmiin. Rubikin kuutiota ratkaistaessa voidaan saman periaatteen mukaisesti laittaa osa oikealla paikallaan olevista paloista myös oikeaan asentoon ja siirtyä vasta sen jälkeen käsittelemään muita paloja.

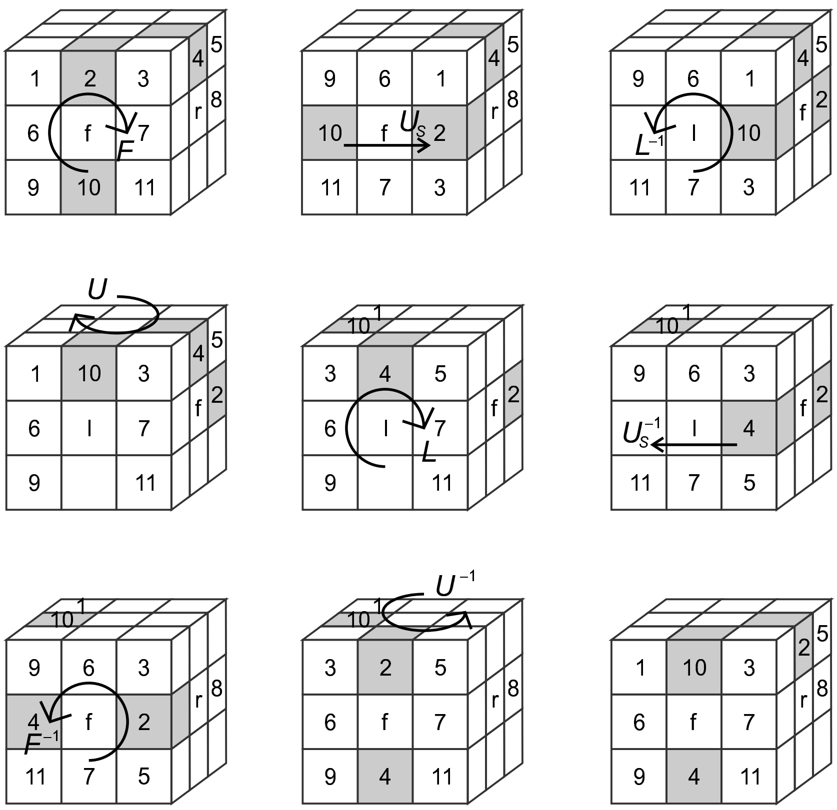
5.3 Algoritmi 2: särmäpalojen 3-sykli

Särmäpaloja kiertävä 3-sykli on samankaltainen kuin aiemmin opittu nurkkapalojen 3-sykli. Se on jälleen muotoa $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, missä σ on perussiirto U^{-1} ja τ kolmen siirron yhdistelmä $F^{-1}U_S^{-1}L$. Yhdessä näistä koostuu siis kuvassa 19 esitetty kahdeksan siirron sarja

$$U^{-1}F^{-1}U_S^{-1}LUL^{-1}U_SF.$$

Tämä siirtosarja suoritetaan tietysti oikealta vasemmalle, aloittaen siirrosta F.

Algoritmi on tässä kirjoitettu siirron U_S avulla, joka on kuution keskitahkon siirto. Tämä on tehty sen takia, että algoritmi olisi helpompi hahmottaa. Toisaalta tästä seuraa, että siirrot F ja L näyttävät nyt kuvassa molemmat pyörittävän etutahkoa, vaikka todellisuudessa kyseinen "etutahko" on kääntynyt oikealle siirron U_S vaikutuksesta siinä vaiheessa, kun käytetään siirtoa L, ja tilalle on tullut aiemmin vasemmalla sivulla ollut tahko. Kuvassa tahkoja merkitään keskipalojen kirjaimilla f, r ja l.



Kuva 19: Särmäpalojen 3-sykli

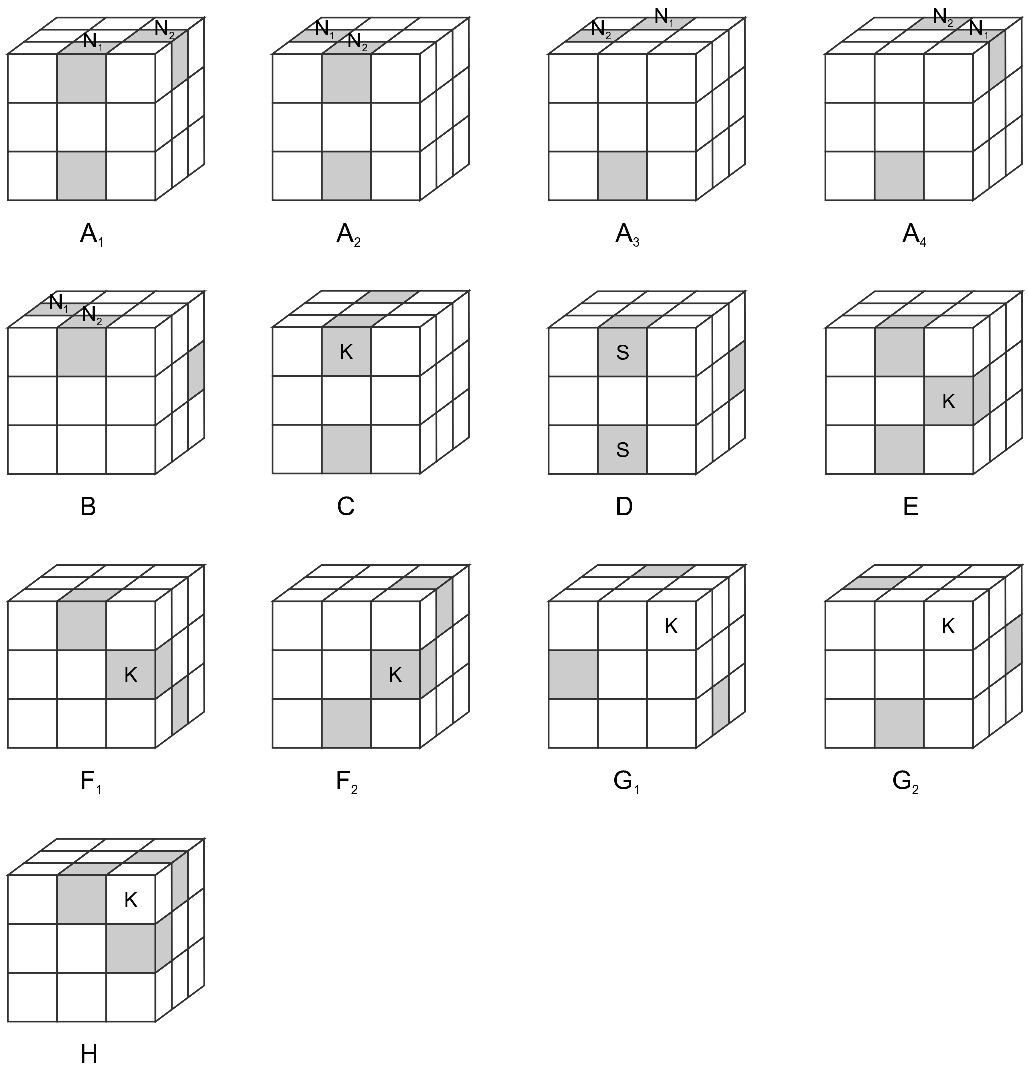
5.4 Rubikin paikkaryhmän ratkaiseminen

Tässä luvussa tarkistetaan ensin, että kaikki särmäpalojen 3-syklit ovat mahdollisia siirtoja. Sen jälkeen tutkitaan Rubikin paikkaryhmän parillisuusominaisuuksia, joita hyväksi käyttäen saadaan lopulta nurkka- ja reunapalat oikeille paikoilleen.

Käydään ensin läpi kaikki kolmen särmäpalan kombinaatiot samalla tavoin kuin aiemmin (luvussa 4.3) tehtiin nurkkapaloille. Tällä kertaa kombinaatioita tulee yhteensä $\binom{12}{3} = 220$ kappaletta, ja ne voidaan jakaa 13 joukkoon kuvan 20 mukaisesti. Kunkin joukon sisällä kombinaatiot saadaan toisistaan koko kuutiota kiertämällä.

Lasketaan kunkin edellä mainituista joukoista sisältämien kombinaatioiden lukumäärä, jotta varmistutaan siitä, että muita kombinaatioita ei ole.

- A_1 Kirjaimilla N_1 ja N_2 merkityt palat voivat sijaita millä tahansa kuution kuudesta sivusta neljässä eri nurkassa. Kolmas pala on aina palaa N_1 vastapäätä. Joukossa on siis $6 \cdot 4 = 24$ kombinaatiota.



Kuva 20: Kolmen reunapalan kombinaatiot

A_2, A_3, A_4 Nämä kombinaatiot saadaan joukon A_1 kombinaatioista yksikäsitteisellä tavalla, nimittäin kiertämällä ylätahkoa kussakin tapauksessa tietyn verran. Kusakin joukossa on siis 24 kombinaatiota.

B Kirjaimilla N_1 ja N_2 merkityt palat voivat sijaita millä tahansa kuution kuudesta sivusta neljässä eri nurkassa. Kolmas pala sijaitsee vastakkaisen nurkkasärmän keskellä. Kombinaatioita on $6 \cdot 4 = 24$ kappaletta.

C Kaikki kolme palaa sijaitsevat samalla keskitahkolla. Keskitahkoja on yhteensä kolme, ja kirjaimella K merkitty pala voi olla mikä tahansa keskitahkon neljästä reunapalasta. Vaihtoehtoja on siis yhteensä $3 \cdot 4 = 12$ kappaletta.

D Kirjaimella S merkityt palat voivat sijaita vierekkäin millä tahansa kuution kolmesta keskitahkosta. Vaihtoehtoja niiden sijainnille saadaan yhteensä 12. Kolmas pala voidaan sen jälkeen valita vastakkaisen sivutahkon jommasta kummasta reunasta. Nämä vaihtoehdot saadaan toisistaan kääntämällä kuutio ylösalaisin. Kombinaatioita on siis 24.

E Kaikki palat sijaitsevat samalla sivutahkolla. Sivutahkoja on kuusi, ja kirjaimella K merkitty pala voidaan valita 4 tahkon joukosta. Kombinaatioita on siis 24.

F_1, F_2 Näissä tapauksissa kirjaimella K merkitty pala voidaan valita kunkin särmän keskeltä, ja kaikki kolme palaa määräytyvät sen mukaan. Molemmissa joukoissa on siis 12 kombinaatiota.

G_1, G_2 Kirjaimella K merkitty pala voidaan valita kunkin nurkkapalan joukosta, ja palat määräytyvät sen mukaisesti. Vastakkaisia nurkkia vastaa kuitenkin sama kombinaatio, joten näissä joukoissa on kummassakin $8/2 = 4$ kombinaatiota.

H Kirjaimella K merkitty pala voidaan valita kustakin nurkasta, ja palat sijaitsevat sen vierellä. Kombinaatioita on 8 kappaletta.

Yhteensä luetelluissa joukoissa on $7 \cdot 24 + 3 \cdot 12 + 8 + 2 \cdot 4 = 220$ kombinaatiota.

Lause 5.16. *Mikä tahansa ryhmän $\mathbb{R}_p$ 3-sykli, joka liikuttaa vain särmäpaloja, on mahdollinen siirto.*

Todistus. Kuten luvun 4.3 vastaavassa todistuksessa, jossa tarkasteltiin nurkkapalojen 3-syklejä, tässäkin riittää todistaa, että jokaista kuvassa 20 lueteltua kombinaatioiden joukkoa kohti löytyy siirto, jolla palat saadaan joukon A_1 mukaiseen perusasemaan. Tämän siirron käänteissiirrolla konjugoiminen tuottaa sitten halutun 3-syklin. Nyt tosin joudutaan kunkin kombinaatiojoukon sisällä mahdollisesti käyttämään myös keskitahkojen siirtoja, mikä johtaa siihen, että alla kuvattavien siirtojen merkinnät muuttuvat. Tämä johtuu siitä, että perussiirrot on alun perin nimetty sivujen mukaan ja sivut puolestaan tunnistetaan keskipaloista, joita joudutaan nyt ehkä siirtämään. Koska siirtojen uudelleen merkitseminen on kuitenkin vain tekninen toimenpide, se sivuutetaan tässä kokonaan.

Konjugoivan siirron käänteissiirto löytyy seuraavasti: Ensin saatetaan kuutiota kiertämällä kuutio johonkin kuvan 20 kolmestatoista asemasta, joista jokaisessa ajatellaan sinisen sivun osoittavan ylöspäin ja keltaisen sivun katsojaan päin. Jos päädyttiin asemaan A_1, siirto on valmis. Muuten suoritetaan (uudelleen nimettyjä) perussiirtoja oheisen taulukon mukaisesti riippuen siitä, mihin asemaan päädyttiin. (Siirrot suoritetaan oikealta vasemmalle.)

asema	siirto	asema	siirto
A_2	U^{-1}	E	R
A_3	U^2	F_1	RD^{-1}
A_4	U	F_2	$F^{-1}D$
B	$U^{-1}D^{-1}R$	G_1	$UF^{-1}R^2$
C	$R^{-1}B^{-1}$	G_2	$R^{-1}U^{-1}$
D	R^{-1}	H	$RD^{-1}R^{-1}$

Kaikissa tapauksissa löytyy siirto, jonka käänteissiirrolla konjugoiminen tuottaa halutun 3-syklin. □

Osoitetaan seuraavaksi lemma, joka liittyy siirtojen parillisuuteen. Merkitään sitä varten kaikkien nurkkapalojen *paikkojen* permutaatioryhmää S_N^p ja samaten kaikkien reunapalojen paikkojen permutaatioryhmää S_S^p. Näitä ryhmiä voidaan ajatella symmetrisen ryhmän S_{20} (kaikkien palojen permutaatiot) aliryhmänä. Helposti nähdään, että nämä ryhmät muodostavat lisäksi suoran tulon ryhmässä S_{20}, sillä $\mathrm{supp}(\nu) \cap \mathrm{supp}(\sigma) = \emptyset$ kaikilla $\nu \in S_N^p$ ja $\sigma \in S_S^p$.

Lemma 5.17. *Jos τ on Rubikin paikkaryhmän siirto, niin sille löytyy yksikäsitteinen esitys tulona $\tau = \nu \circ \sigma$, missä $\nu \in S_N^p$ ja $\sigma \in S_S^p$. Näille permutaatioille pätee* $\mathrm{sign}(\nu) = \mathrm{sign}(\sigma)$.

Todistus. Koska τ on paikkaryhmän siirto, se voidaan esittää paikkaryhmän perussiirtojen $\tau_1, \dots, \tau_n$ tulona. Kaikkien palojen permutaatioiden ryhmässä S_{20} jokainen perussiirto τ_i on puolestaan kahden erillisen 4-syklin tulo, joista toinen liikuttaa vain nurkkapaloja, toinen vain särmäpaloja. Merkitään näitä 4-syklejä $\nu_i \in S_N^p$ ja $\sigma_i \in S_S^p$. Koska ryhmät S_N^p ja S_S^p muodostavat suoran tulon, voidaan kirjoittaa $\tau_i = (\nu_i, \sigma_i)$ jokaisella i. Näin saadaan siirrolle τ esitys

$$\tau = (\nu_1, \sigma_1) \cdots (\nu_n, \sigma_n) = (\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n,\ \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n).$$

Merkitään nyt $\nu = \nu_1 \cdots \nu_n$ ja $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$. Koska kaikki siirrot ν_i ja σ_i ovat 4-syklejä, pätee

$$\mathrm{sign}(\nu) = (-1)^n = \mathrm{sign}(\sigma).$$

□

Jokainen Rubikin paikkaryhmän siirto $\sigma \in \mathbb{R}_p$ voidaan siis kirjoittaa muodossa $(\nu, \sigma) \in S_N^p \times S_S^p$. Jos myös ν ja σ kuuluvat paikkaryhmään $\mathbb{R}_p$, niin (ν, σ) on tuloryhmässä $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$. Edellisen lemman avulla saadaan nyt lause, joka mahdollistaa paikkaryhmän ratkaisemisen.

Lause 5.18. *Oletetaan, että* $\tau = (\nu, \sigma) \in \mathbb{R}_p$. *Jos* $\operatorname{sign}(\nu) = 1$ *tai* $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, *niin* ν *ja* σ *kuuluvat paikkaryhmään* $\mathbb{R}_p$. *Lisäksi tuloryhmän* $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$ *indeksille paikkaryhmän aliryhmänä pätee* $[\mathbb{R}_p : \mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}] \leq 2$.

Todistus. Oletetaan, että $\operatorname{sign}(\nu) = 1$ tai $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Edellisen lemman perusteella pätee tällöin $\operatorname{sign}(\nu) = \operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Aiemmin on osoitettu, että kaikki nurkkapalojen 3-syklit ovat mahdollisia siirtoja, ja lauseen 3.12 mukaan jokainen parillinen permutaatio saadaan 3-syklien yhdistelmänä. Täten $\nu \in \mathbb{R}_p$, ja sama pätee myös permutaatiolle σ.

Osoitetaan sitten, että $[\mathbb{R}_p : \mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}] \leq 2$. Olkoon $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ jokin perussiirto. Oletetaan, että $\tau = (\sigma, \nu) \in \mathbb{R}_p$ ei kuulu tuloryhmään $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$. Todistuksen alun perusteella joko $\operatorname{sign}(\nu) = -1$ tai $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$. Tällöin täytyy kuitenkin edellisen lemman mukaan olla $\operatorname{sign}(\nu) = \operatorname{sign}(\sigma) = -1$, ja koska perussiirrolle pätee $\operatorname{sign}(\pi_1) = \operatorname{sign}(\pi_2) = -1$, saadaan

$$\operatorname{sign}(\pi_1^{-1}\nu) = 1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{sign}(\pi_2^{-1}\sigma) = 1.$$

Yllä osoitettiin, että tämän perusteella yhdistelmä $\pi^{-1}\tau = (\pi_1^{-1}\nu, \pi_2^{-1}\sigma)$ kuuluu tuloryhmään $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$, joten $\tau \in \pi \cdot (\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp})$. Koska mikä tahansa tuloryhmään kuulumaton permutaatio kuuluu yhteen tiettyyn tuloryhmän sivuluokkaan, sivuluokkia voi olla korkeintaan kaksi. □

Edellisen lauseen nojalla Rubikin kuution palat saadaan oikeille paikoilleen seuraavalla tavalla:

1. Kirjoitetaan, onko ratkaistavassa asemassa nurkkapalojen (tai särmäpalojen) permutaatio parillinen. Jos ei ole, tehdään jokin perussiirto. Tämän jälkeen *sekä* nurkkien *että* särmien permutaatio on parillinen.

2. Ratkaistaan nurkat ja särmät erikseen aiemmin opittujen 3-syklien ja niiden konjugaattien avulla.