5.5 Puolisuorat tulot

Kahden aliryhmän suorassa tulossa eri aliryhmien alkiot kommutoivat keskenään. Tällöin aliryhmät ovat toisistaan riippumattomia. Ehtoa voidaan kuitenkin lieventää, jos vain halutaan kahden aliryhmän tulon olevan ryhmä eikä riippumattomuudella ole niin väliä.

Tarkastellaan kahta aliryhmää N ja H jossain ryhmässä G. Tulojoukon alkiot ovat muotoa $nh \in NH$, ja kahden tällaisen alkion tulo on $n_1h_1 \cdot n_2h_2$. Jotta tämä alkio kuuluisi edelleen joukkoon NH, riittää että toinen aliryhmistä, esimerkiksi N, on *normaali*. Tällöin nimittäin nähdään, että N:n vasemman sivuluokan alkio h_1n_2 kuuluu myös vastaavaan oikeanpuoleiseen sivuluokkaan, joten $h_1n_2 = n'h_1$ eräällä $n' \in N$. Näin ollen

$$n_1h_1 \cdot n_2h_2 = n_1n' \cdot h_1h_2 \in NH.$$

Tulojoukko on siis suljettu laskutoimituksen suhteen. Samalla tavoin nähdään myös, että käänteisalkiot ovat mukana tulojoukossa, sillä $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = n'h^{-1}$ eräällä $n' \in N$.

Määritelmä 5.19. Ryhmän G aliryhmät N ja H muodostavat *sisäisen puolisuoran tulon*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1) N on normaali G:ssä

2) $N \cap H = \{e\}$, missä e on ryhmän G neutraalialkio.

Puolisuoraa tuloa merkitään $NH = N \rtimes H$ tai $HN = H \ltimes N$.

Esimerkki 5.20. Alternoivalla ryhmällä A_4 on normaali aliryhmä

$$N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Tarkastellaan tämän lisäksi 3-syklin virittämää aliryhmää $H = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$, joka ei ole normaali (esim. ${}^{(34)}(123) = (124) \notin A_4$). Näiden aliryhmien leikkauksessa on vain identtinen permutaatio, joten ne muodostavat puolisuoran tulon $N \rtimes H$. Kootaan kyseisen tulon alkiot taulukkoon.

$N \rtimes H$	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
id	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(123)	(123)	(243)	(142)	(134)
(123)	(132)	(143)	(234)	(124)

Jokainen alternoivan ryhmän alkio esiintyy taulukossa täsmälleen kerran. Siispä $N \rtimes H = A_4$, ja jokaisella A_4:n alkiolla on yksikäsitteinen esitys tulona $n \circ h$, missä $n \in N$ ja $h \in H$.

Aivan kuten suoran tulon tapauksessa, myös puolisuorassa tulossa $N \rtimes H$ alkioiden esitykset muodossa nh ovat yksikäsitteisiä. Tämä seuraa määritelmän kohdasta 2). Kahden alkion tulon esitys saadaan seuraavasta kaavasta, joka pätee kaikissa ryhmissä:

$$n_1h_1 \cdot n_2h_2 = n_1(h_1n_2h_1^{-1})h_1h_2 = \underbrace{n_1{}^{h_1}n_2}_{\in N} \cdot \underbrace{h_1h_2}_{\in H}. \tag{5.21}$$

Kaavasta nähdään, että ei-normaalin ryhmän H alkiot voidaan jälleen kertoa keskenään N:n alkioista riippumatta, mutta toista normaalin aliryhmän alkiota on kerrottaessa konjugoitava ensin H:n alkiolla. Olennaista on, että konjugaatti kuuluu edelleen ryhmään N, koska N on normaali. Kyseessä on siis eräänlainen puolittainen riippumattomuus.

Huom. Jos normaali aliryhmä on tulossa oikeanpuoleisena, yllä oleva kaava tulee muotoon $h_1n_1 \cdot h_2n_2 = h_1h_2 \cdot {}^{h_2^{-1}}n_1n_2$.

Kaavan (5.21) avulla voidaan määritellä myös kahden erilaisen ryhmän *ulkoinen* puolisuora tulo. Ongelmana on vain se, että alkion n konjugointi alkiolla h ei onnistu, jos n ja h ovat eri ryhmissä. Tällainen ulkoinen konjugointi voidaan kuitenkin määritellä, kun ensin mietitään, minkälainen operaatio konjugointi itse asiassa on.

Konjugoinnissa jokaiseen ryhmän G alkioon g liitetään kuvaus $x \mapsto {}^gx$. Tämä kuvaus on ryhmän G sisäinen automorfismi eli bijektiivinen homomorfismi ryhmältä itselleen. Lisäksi konjugointi toteuttaa ns. *ryhmän toiminnan* ehdot: neutraalialkiota vastaa identtinen kuvaus $x \mapsto x$, ja alkioiden tuloa vastaa yhdistetty kuvaus, nimittäin ${}^{gh}x = {}^g({}^hx)$. Nämä ominaisuudet huomioiden voidaan määritellä ryhmän konjugointi toisessa ryhmässä.

Määritelmä 5.22. Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvausta $g \mapsto \varphi_g$, joka liittää jokaiseen G:n alkioon g jonkin kuvauksen φ_g ryhmältä H itselleen, kutsutaan *konjugoivaksi toiminnaksi*, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1) kuvaus φ_g on isomorfismi (eli automorfismi) jokaisella $g \in G$

2) φ_e on identtinen kuvaus, jos e on G:n neutraalialkio

3) $\varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ kaikilla $g_1, g_2 \in G$.

Konjugoivan toiminnan käsitteen sekä kaavan (5.21) avulla voidaan määritellä kahden mielivaltaisen ryhmän puolisuora tulo.

Määritelmä 5.23. Olkoot $(N, \diamond)$ ja $(G, *)$ ryhmiä. Oletetaan, että on määritelty jokin ryhmän G konjugoiva toiminta $g \mapsto \varphi_g$ ryhmässä N. Ryhmien G ja N *ulkoinen puolisuora tulo* $N \rtimes G$ muodostuu pareista (n, g), missä $n \in N$ ja $g \in G$. Laskutoimitus määritellään kaavalla

$$(n_1, g_1)(n_2, g_2) = \big(n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2),\ g_1 * g_2\big).$$

Toisinpäin merkityssä puolisuorassa tulossa $G \ltimes N$ laskutoimitus on vastaavasti

$$(g_1, n_1)(g_2, n_2) = \big(g_1 * g_2,\ \varphi_{g_2}^{-1}(n_1) \diamond n_2\big).$$

Tuloa voidaan merkitä myös ulkoisuutta korostaen $(N \rtimes G)_u$ tai $(G \ltimes N)_u$.

Huom. Ulkoisen suoran tulon rakenne riippuu valitusta konjugoivasta toiminnasta. Toiminnaksi voidaan aina valita $\varphi_g = \mathrm{id}$ kaikilla g, jolloin puolisuorasta tulosta tulee suora tulo. Eri valinnat tuottavat kuitenkin erilaisen tulon.

Toisin kuin suoran tulon tapauksessa, ulkoisesta puolisuorasta tulosta on vaikea äkkiseltään nähdä, että se todella on ryhmä. Todistetaan tämä seuraavaksi.

Lause 5.24. *Ryhmien $(N, \diamond)$ ja $(H, *)$ puolisuora tulo on ryhmä.*

Todistus. Puolisuora tulo on suljettu laskutoimituksen suhteen, koska konjugaatti $\varphi_{g_1}(n_2)$ on ryhmän N alkio ja siten tulo $n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2)$ kuuluu ryhmään N. Tarkistetaan ryhmän aksioomat.

1) Laskutoimitus on liitännäinen, sillä kaikilla $n_1, n_2, n_3 \in N$ ja $g_1, g_2, g_3 \in G$ pätee

$$\begin{aligned}
\big((n_1, g_1)(n_2, g_2)\big)(n_3, g_3) &= \big(n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2),\ g_1 * g_2\big)(n_3, g_3) \\
&= \big(n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2) \diamond \varphi_{g_1 * g_2}(n_3),\ g_1 * g_2 * g_3\big) \\
&= \big(n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2) \diamond \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(n_3)),\ g_1 * g_2 * g_3\big) \\
&= \big(n_1 \diamond \varphi_{g_1}(n_2 \diamond \varphi_{g_2}(n_3),\ g_1 * g_2 * g_3\big) \\
&= (n_1, g_1)\big(n_2 \diamond \varphi_{g_2}(n_3),\ g_2 * g_3\big) \\
&= (n_1, g_1)\big(n_2, g_2)(n_3, g_3)\big).
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin hyväksi muun muassa niitä tietoja, että $\varphi_g(n_1 n_2) = \varphi_g(n_1)\varphi_g(n_2)$ ja $\varphi_{g_1 g_2}(n) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(n))$.

2) Puolisuoran tulon neutraalialkio on pari (e_N, e_G), missä e_N on N:n neutraalialkio ja e_G on G:n. Kaikilla $n \in N$ ja $g \in G$ nimittäin pätee

$$(e_N, e_G)(n, g) = (e_N \diamond \varphi_{e_N}(n),\ e_G * g) = (e_N \diamond n,\ g) = (n, g)$$

ja

$$(n, g)(e_N, e_G) = (n \diamond \varphi_g(e_N),\, g * e_G) = (n \diamond e_N,\, g) = (n, g).$$

Yllä käytettiin tietoja $\varphi_{e_N} = \mathrm{id}$ ja $\varphi_g(e_N) = e_N$ (homomorfismi).

3) Alkion (n, g) käänteisalkio puolisuorassa tulossa on $(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1}),\, g^{-1})$, sillä

$$\begin{aligned}
\big(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1}),\, g^{-1}\big)\,(n, g) &= \big(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1}) \diamond \varphi_{g^{-1}}(n),\, g^{-1} * g\big) \\
&= \big(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1} \diamond n),\, e_G\big) = (\varphi_{g^{-1}}(e_N),\, e_G) \\
&= (e_N,\, e_G)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(n, g)\,\big(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1}),\, g^{-1}\big) &= \big(n \diamond \varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(n^{-1})),\, g * g^{-1}\big) \\
&= \big(n \diamond \varphi_{g*g^{-1}}(n^{-1}),\, e_G\big) = \big(n \diamond \varphi_{e_G}(n^{-1}),\, e_G\big) \\
&= \big(n \diamond n^{-1},\, e_G\big) = (e_N, e_G).
\end{aligned}$$

Nyt on osoitettu, että puolisuora tulo $N \rtimes G$ on ryhmä. Tapaus $G \ltimes N$ voidaan käsitellä samalla tavalla. Tuossa tapauksessa käänteisalkioksi tulee $(g^{-1},\, \varphi_g(n^{-1}))$.

$\square$

Esimerkki 5.25. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmän aliryhmää

$$N = \{\mathrm{id}, \pi, \rho^2, \pi \circ \rho^2\},$$

missä π on peilaus pystyakselin suhteen, ρ^2 kierto puolirympyrän verran, ja $\pi \circ \rho^2$ peilaus vaaka-akselin suhteen (vrt. esimerkki 4.9. Tämä ryhmä on vaihdannainen, ja sen kertotaulu näyttää seuraavalta:

$\circ$	id	π	ρ^2	$\pi \circ \rho^2$
id	id	π	ρ^2	$\pi \circ \rho^2$
π	π	id	$\pi \circ \rho^2$	ρ^2
ρ^2	ρ^2	$\pi \circ \rho^2$	id	π
$\pi \circ \rho^2$	$\pi \circ \rho^2$	ρ^2	π	id

.

Muodostetaan nyt ryhmän N puolisuora tulo ryhmän $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [2], [3]\}$ kanssa. Sitä varten on ensin määriteltävä ryhmän $\mathbb{Z}_3$ konjugoiva toiminta ryhmässä N.

Konjugoivan toiminnan määritelmän mukaan täytyy olla $\varphi_0 = \mathrm{id}$, ja $\varphi_2 = \varphi_{1+1} = \varphi_1 \circ \varphi_1$. Tarvitsee siis valita vain alkiota $[1] \in \mathbb{Z}_3$ vastaava homomorfismi φ_1. Määritellään se seuraavan taulukon mukaisesti:

σ	id	π	ρ^2	$\pi \circ \rho^2$
$\varphi_1(\sigma)$	id	ρ^2	$\pi \circ \rho^2$	π

.

Taulukosta nähdään suoraan, että φ_1 on bijektio. Homomorfisuuden tarkistamiseksi pitäisi tarkistaa kaikki tulot $\varphi_1(\sigma) \circ \varphi_1(\tau)$, joissa σ ja τ ovat N:n identtisestä poikkeavia permutaatioita. Tyydytään tässä tarkistamaan vain yksi:

$$\varphi(\pi) \circ \varphi(\rho^2) = \rho^2 \circ (\pi \circ \rho^2) = \pi = \varphi(\pi \circ \rho^2).$$

Koska φ_1 on isomorfismi, myös φ_2 on. Lisäksi voidaan helposti varmistua myös siitä, että

$$\varphi_0(\sigma) = \varphi_{1+1+1}(\sigma) = \varphi(\varphi(\varphi(\sigma))) = \mathrm{id}(\sigma)$$

kaikilla $\sigma \in N$. Konjugoiva toiminta voidaan siis määritellä edellä kuvatulla tavalla, ja niinpä voidaan määritellä myös tätä toimintaa vastaava puolisuora tulo $N \rtimes \mathbb{Z}_3$.

Lasketaan lopuksi esimerkin vuoksi alkioiden kertaluvut ryhmässä $N \rtimes \mathbb{Z}_3$. Kaikilla $\sigma \in N$ pätee

$$(\sigma, 0)(\sigma, 0) = (\sigma \circ \varphi_0(\sigma), 0 + 0) = (\sigma \circ \sigma, 0) = (\mathrm{id}, 0),$$

sillä kaikkien N:n alkioiden kertaluku on 2. Muotoa $(\sigma, 0)$ olevien alkioiden kertaluku on siis kaksi (paitsi neutraalialkion $(\mathrm{id}, 0)$).

Olkoot sitten $\sigma \in N$ ja $k \neq 0$. Tällöin

$$(\sigma, k)(\sigma, k) = (\sigma \circ \varphi_k(\sigma), k + k) = (\sigma \circ \varphi_k(\sigma), 2k).$$

Saatu alkio ei ole neutraalialkio, koska $2k$ on nollasta poikkeava kaikilla $k \in \mathbb{Z}_3$. Toisaalta

$$\begin{aligned}(\sigma, k)^3 &= (\sigma \circ \varphi_k(\sigma), 2k)(\sigma, k) = (\sigma \circ \varphi_k(\sigma) \circ \varphi_{2k}(\sigma), 2k + k) \\ &= (\sigma \circ \varphi_k(\sigma) \circ \varphi_{2k}(\sigma), 0).\end{aligned}$$

Jos viimeisessä lausekkeessa $\sigma = \mathrm{id}$, niin tulo $\sigma \circ \varphi_k(\sigma) \circ \varphi_{2k}(\sigma)$ on kolmen identtisen permutaation tulo. Jos taas $\sigma \neq \mathrm{id}$, niin kyseisessä tulossa on kolme eri identtisestä poikkeavaa permutaatiota. Molemmissa tapauksissa tulo on identtinen kuvaus, joten $(\sigma, k)^3$ on neutraalialkio. Siis jos $k \neq 0$, niin alkion (σ, k) kertaluku on kolme.

Tarkempi tutkimus osoittaisi, että puolisuora tulo $N \rtimes \mathbb{Z}_3$ on itse asiassa isomorfinen ryhmän A_{12} kanssa.

6 Kommutaattorit

Alkioiden kommutaattori on niiden vaihdannaisuuden mitta. Toisaalta kommutaattoreita voidaan käyttää hyväksi etsittäessä ryhmästä tietynlaisia alkioita.

6.1 Kommutaattorien perusominaisuudet

Jos alkiot g ja h eivät ole keskenään vaihdannaisia, eli ne eivät *kommutoi* keskenään, tulot gh ja hg eroavat toisistaan jollain tavoin. Tällöin löytyy jokin alkio r, jolle pätee $gh = r \cdot hg$. Tämä luku r ilmaisee ikään kuin eri päin laskettujen tulojen välisen suhteen.

Määritelmä 6.1. Olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Yhdistelmää

$$[g,h] = (gh)(hg)^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} \in G$$

kutsutaan alkioiden g ja h *kommutaattoriksi.*

Alkiot g ja h kommutoivat, jos ja vain jos niiden kommutaattori on neutraalialkio. Kommutaattorilla ja konjugaatilla on selvä yhteys, joka ilmenee esimerkiksi kaavoissa

$$[g,h] = {}^{g}h \cdot h^{-1} \quad \text{ja} \quad [g,h] = g \cdot {}^{h}\big(g^{-1}\big).$$

Lisäksi seuraavat kaavat ovat kommutaattoreita käsiteltäessä hyödyllisiä:

$$[g,h] \cdot g = g \cdot [h, g^{-1}] \quad \text{ja} \quad [g,h] \cdot h = h \cdot [h^{-1}, g].$$

On myös muistettava, että alkioiden kommutaattori ei ole symmetrinen, vaan $[g,h] = [h,g]^{-1}$.

Esimerkki 6.2. Lasketaan permutaatioiden $\sigma = (123)(45)$ ja $\tau = (2345)$ kommutaattori ryhmässä S_5:

$$[\sigma,\tau] = {}^{\sigma}\tau \cdot \tau^{-1} = {}^{(123)(45)}(2345) \circ (2345)^{-1} = (3154) \circ (5432) = (15324).$$

Kommutaattorista tuli 5-sykli, johon osallistuvat kaikki perusjoukon luvut. Voidaan ajatella, että tämä 5-sykli on “verraten suuri” alkio ryhmässä S_5, mikä tarkoittaa sitä, että permutaatiot σ ja τ kommutoivat hyvin heikosti keskenään.

Paitsi, että kommutaattoreita voi käyttää mittaamaan alkioiden välistä kommutointia, niitä voi käyttää myös *tuottamaan* erityisen suuria tai pieniä alkioita. Jos nimittäin löydetään alkiot, jotka näyttävät olevan lähes vaihdannaisia keskenään, niiden kommutaattoriksi saadaan mitä luultavimmin hyvin pieni alkio. Alkion “suuruus” tai “pienuus” ei sinänsä ole yleensä ryhmässä selvästi määriteltyä, mutta jos ryhmä koostuu johonkin joukkoon vaikuttavista alkioista, kuten permutaatioista, pieni alkio on sellainen, joka vaikuttaa joukkoon mahdollisimman vähän.

Esimerkiksi kaksi permutaatiota kommutoivat keskenään varmasti, jos ne vaikuttavat kokonaan eri alkioihin. Mitä vähemmän on yhteisiä alkioita, joihin kummatkin vaikuttavat, sitä enemmän permutaatiot kommutoivat ja sitä pienempi on niiden kommutaattori. Kuitenkin jokainen kommutaattori on välttämättä parillinen permutaatio, ja pienin parillinen permutaatio on 3-sykli.

Lause 6.3. *Olkoot σ ja τ jonkin joukon X permutaatioita. Jos kantajien leikkaukselle pätee* $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \{x\}$ *jollain $x \in X$, niin*

$$[\sigma, \tau] = \big(x \ \sigma(x) \ \tau(x)\big).$$

Todistus. Näytetään ensin, että ehdosta $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \{x\}$ seuraa aina $[\sigma, \tau](x) = \sigma(x)$. Huomaa, että permutaation τ kantaja sisältää täsmälleen samat alkiot kuin käänteiskuvauksen τ^{-1} kantaja. Siispä $\tau(x)$ kuuluu aina σ:n kantajaan. Toisaalta esimerkiksi $\tau(x) \neq x$, joten $\tau(x) \notin \operatorname{supp}(\sigma)$. Nyt saadaan

$$[\sigma, \tau](x) = \sigma\tau\sigma^{-1} \underbrace{\tau^{-1}(x)}_{\notin \operatorname{supp}(\sigma)} = \sigma\tau\tau^{-1}(x) = \sigma(x).$$

Saadun tuloksen sekä aiemmin mainittujen kaavojen perusteella pätee myös

$$[\sigma, \tau](\sigma(x)) = \left(\sigma \circ [\tau, \sigma^{-1}]\right)(x) = \sigma(\tau(x)) = \tau(x)$$

ja

$$[\sigma, \tau](\tau(x)) = \left(\tau \circ [\tau^{-1}, \sigma]\right)(x) = \tau(\tau^{-1}(x)) = x.$$

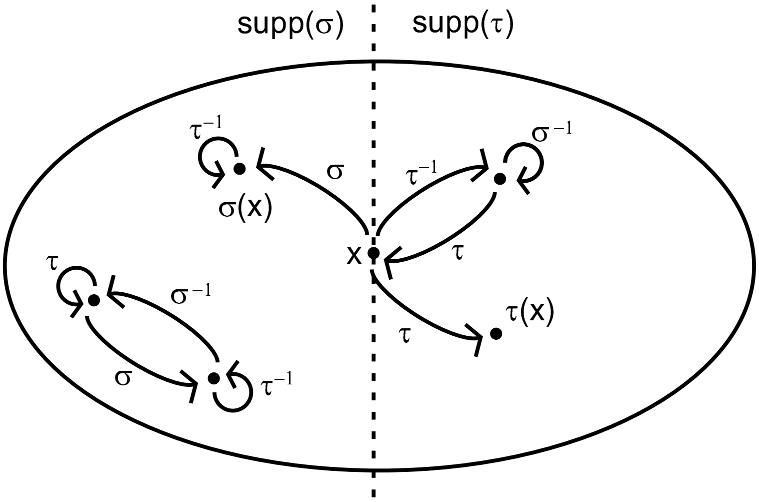
Yllä nähtiin, että permutaatio $[\sigma, \tau]$ sisältää ainakin 3-syklin $(x \ \sigma(x) \ \tau(x))$. Jäljelle jää tarkistaa, mitä tapahtuu, jos $y \notin \{x, \sigma(x), \tau(x)\}$. Tällöin voidaan tarkastella kolmea vaihtoehtoa. Jos y ei ole σ:n eikä τ:n kantajassa, niin selvästikin $[\sigma, \tau](y) = y$. Jos taas $y \in \operatorname{supp}(\sigma)$, niin y ei voi olla samalla τ:n kantajassa (koska $y \neq x$), joten

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(y) = \sigma\tau \underbrace{\sigma^{-1}(y)}_{\neq x} = \sigma\sigma^{-1}(y) = y.$$

Edelleen, jos $y \in \operatorname{supp}(\tau)$, niin

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1} \underbrace{\tau^{-1}(y)}_{\neq x} = \sigma\tau\tau^{-1}(y) = \sigma(y) = y.$$

Nähtiin, että aiemmin löydetyn 3-syklin ulkopuoliset alkiot pysyvät paikallaan, joten kommutaattori on juuri tuo mainittu 3-sykli. $\square$



Kuva 21: Miten kommutaattorista tulee 3-sykli

6.2 Kommutaattorit Rubikin ryhmässä

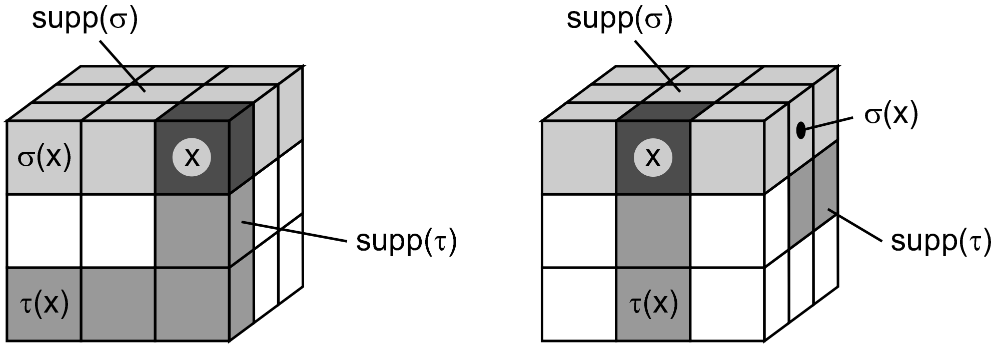
Rubikin kuution ratkaisemisessa keskeinen ongelma on, että perussiirrot liikuttavat niin suurta osaa kuution ruuduista. Kun yksi perussiirto liikuttaa 20 ruutua 48:sta, on hyvin vaikea seurata, mihin kukin ruutu ajautuu. Kommutaattoreita voi tässä yhteydessä käyttää tehokkaasti hyödyksi, sillä niiden avulla saadaan tuotettua siirtoja, jotka liikuttavat paljon pienempää osaa kuutiosta kerrallaan.

Tarkastellaan ensin tilannetta Rubikin paikkaryhmässä. Lauseen 6.3 mukaan voidaan tuottaa kolmen palan sykli, jos vain löydetään kaksi siirtoa, joiden yhteisen vaikutuksen piiriin kuuluu ainoastaan yksi pala. Yritetään saada tämä aikaan nurkkapaloilla niin, että tuloksena olisi luvussa 3.3 opittu nurkkapalojen 3-sykli.

Koska lauseen 6.3 mukaan siirtojen σ ja τ kommutaattorina on mahdollista saada 3-sykli $(x\ \sigma(x)\ \tau(x))$, on järjestettävä niin, että σ siirtää etutahkon oikeassa yläkulmassa olevan palan vasempaan yläkulmaan, ja τ siirtää saman palan vasempaan alakulmaan (ks. kuva 22). Siirroksi σ voidaan valita vaikkapa ylätahkon pyöritys U. Tämän jälkeen siirron τ on kuitenkin oltava sellainen, että se ei liikuta muita ylätahkon paloja kuin palaa x. Tämä saadaan aikaan *konjugoimalla* alatahkon pyöritys D^{-1}, joka ei liikuta ylätahkoa, sellaisella siirrolla, joka siirtää oikeassa alakulmassa olevan palan x:n paikalle. Näin saadaan siirroksi τ lopulta konjugaatti ${}^{R}D^{-1} = RD^{-1}R^{-1}$.

Särmäpalojen kohdalla tilanne on samanlainen. Opitussa siirtosarjassa siirtoa σ vastaa ylätahkon kierto U^{-1}. Siirron τ pitäisi nyt siirtää pala x alarivin keskipalan paikalle (ks. kuva 22) ilman että ylätahkon palan liikkuvat. Tämä onnistuu konjugoimalla etutahkon kierrolla pystysuoran keskirivin paikalle vaakasuora. Tällöin haluttu siirto muuttuu vaakasuoran keskitahkon siirroksi, joka puolestaan ei koske ylätahkoon.

Tilanne on nyt kuitenkin hieman mutkikkaampi kuin nurkkapalojen tapauksessa, sillä keskitahkon siirtämisen on alun perin tulkittu tarkoittavan rinnakkaisten sivutahkojen liikettä. Vaakasuoran keskitahkon kiertäminen siis liikuttaa oikeastaan myös ylätahkon paloja, mikä ei ollut tarkoitus. Tässä yhteydessä onkin parempi sallia hetkeksi keskitahkojen pyöritykset omiksi siirroikseen, jotka pitävät sivutahkojen palat paikallaan, jotta päästään käyttämään lausetta 6.3. Sen nojalla tässäkin tapauksessa saadaan 3-sykli, vaikka tilannetta tulkittiinkin totutusta poikkeavalla tavalla. Lopuksi voidaan sitten nimetä käytetyt siirrot oikeaoppisesti, jolloin siirrosta τ tulee tavallisen konjugaatin sijaan yhdistelmä $\tau = F^{-1}U_S^{-1}L$.



Kuva 22: Paikkaryhmän 3-syklien muodostaminen

Asentoryhmässä 3-syklejä tuottavan lauseen käyttäminen ei kuitenkaan onnistu. Koska yhden ruudun liikkuessa liikkuvat samalla kaikki saman palan ruudut, ei kahden permutaation kantajien leikkaus voi olla yksiö. Merkitään tässä yhteydessä sitä palaa, johon ruutu x kuuluu, symbolilla P_x, ja tuon palan kaikkien ruutujen joukkoa symbolilla R_x. Jos siis kaksi siirtoa vaikuttavat molemmat ruutuun x, niiden yhteinen vaikutusalue voi olla pienimmillään joukko R_x. Niinpä tällaisten siirtojen kommutaattori on pienin löydettävissä oleva kommutaattori.

Tarkastellaan seuraavaksi, minkälaiset siirrot voitaisiin valita, jotta saataisiin kantajien leikkaukseksi joukko R_x ja siirtojen kommutaattorista tulisi asentoryhmän siirto. Jos kumpikaan siirto ei liikuta palaa P_x, ne ovat molemmat tuon palan ruutuihin rajoitettuina syklejä. Tällaiset siirrot kommutoivat keskenään palan P_x kohdalla, joten niiden kommutaattori ei liikuta lainkaan kyseisen palan ruutuja. Jos taas molemmat siirrot liikuttavat palaa P_x, tilanne palautuu takaisin paikkaryhmään. Tuloksena on tällöin palojen 3-sykli, joka ei kuulu asentoryhmään. Ainoa jäljellä oleva vaihtoehto on, että toinen siirroista liikuttaa palaa P_x ja toinen ainoastaan vaihtaa sen ruutujen järjestystä. Tällaisessa tilanteessa syntyvä kommutaattori kuuluu asentoryhmään, mikä voitaisiin haluttaessa myös helposti todistaa.

6.3 Algoritmi 3: nurkkapalojen kierto

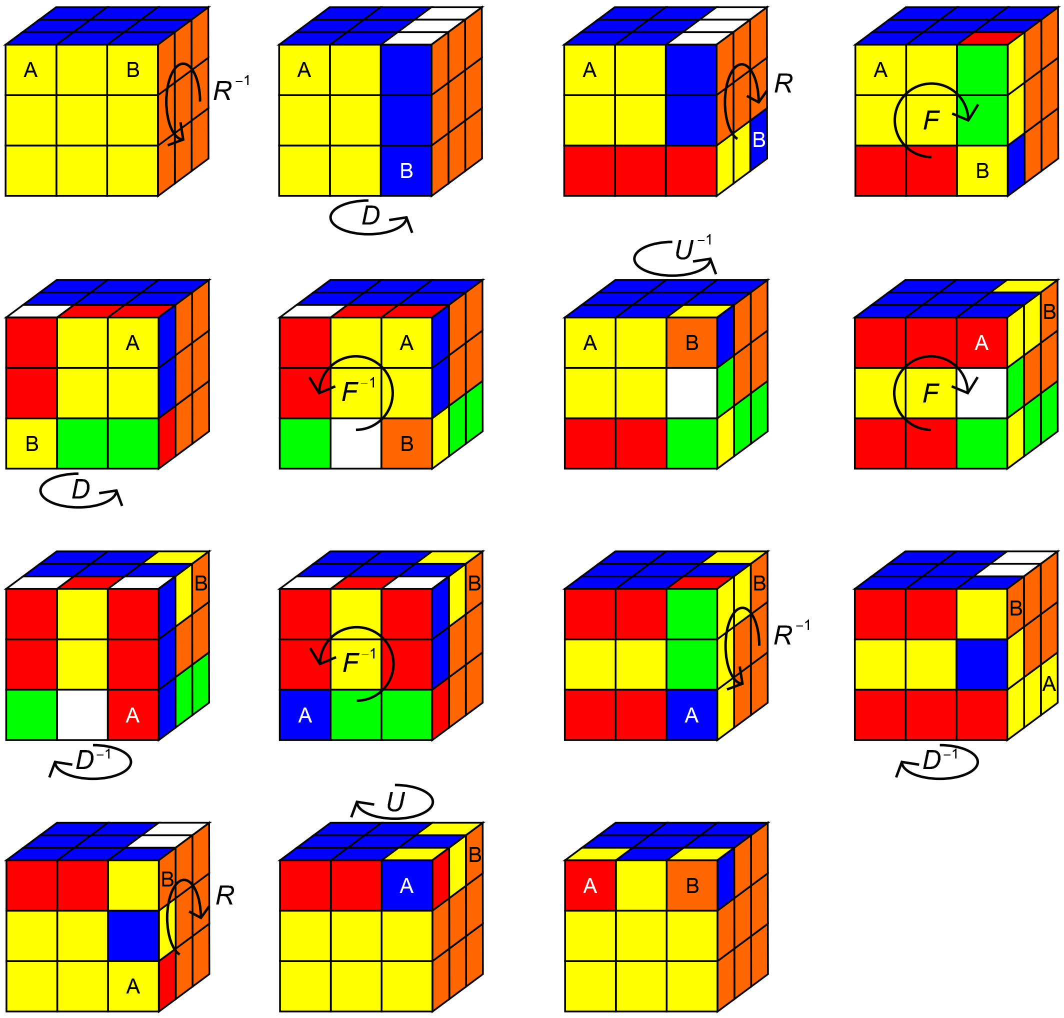
Nurkkapalojen kierron tuottava siirtosarjan muodostaminen perustuu luvun 6.2 päätelmiin. Siirtosarja on kahden siirron kommutaattori, joista toinen kiertää nurkkapalaa ja toinen siirtää sitä paikaltaan. Siirtävä permutaatio σ on tässäkin algoritmissa ylätahkon kierto U. Kiertävä permutaatio puolestaan on yhdistelmä $\tau = RD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}F$. Näistä muodostuu kommutaattori

$$[\sigma, \tau] = URD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}FU^{-1}F^{-1}DFRDR^{-1}.$$

Tämä siirtosarja, joka on esitetty kuvassa 23, kiertää kahta vierekkäistä nurkkapalaa A ja B vastakkaisiin suuntiin. Pala A kiertyy vastapäivään ja pala B myötäpäivään.

Siirtosarjan voi hahmottaa esimerkiksi seuraavasti: Ensin kierretään palaa B myötäpäivään, jolloin kuution kaksi alinta tahkoa voivat sekoittua miten hyvänsä. Sen jälkeen siirretään pala A palan B paikalle alempiin tahkoihin koskematta ja suoritetaan aiemmat siirrot uudestaan päinvastaisessa järjestyksessä. Nämä siirrot kiertävät nyt palaa A vastapäivään ja asettavat samalla kuution alaosan uudelleen järjestykseen. Lopuksi käännetään palat A ja B alkuperäisille paikoilleen.

Siirto τ, joka kiertää oikeassa ylänurkassa olevaa palaa, on puolestaan helpointa hahmottaa kahdessa osassa. Molemmat osat ovat samanlaisia konjugaattimuotoisia siirtoja; toinen koskee kuution etutahkoa, toinen oikeanpuoleista sivutahkoa.



Kuva 23: Nurkkapalojen kierto