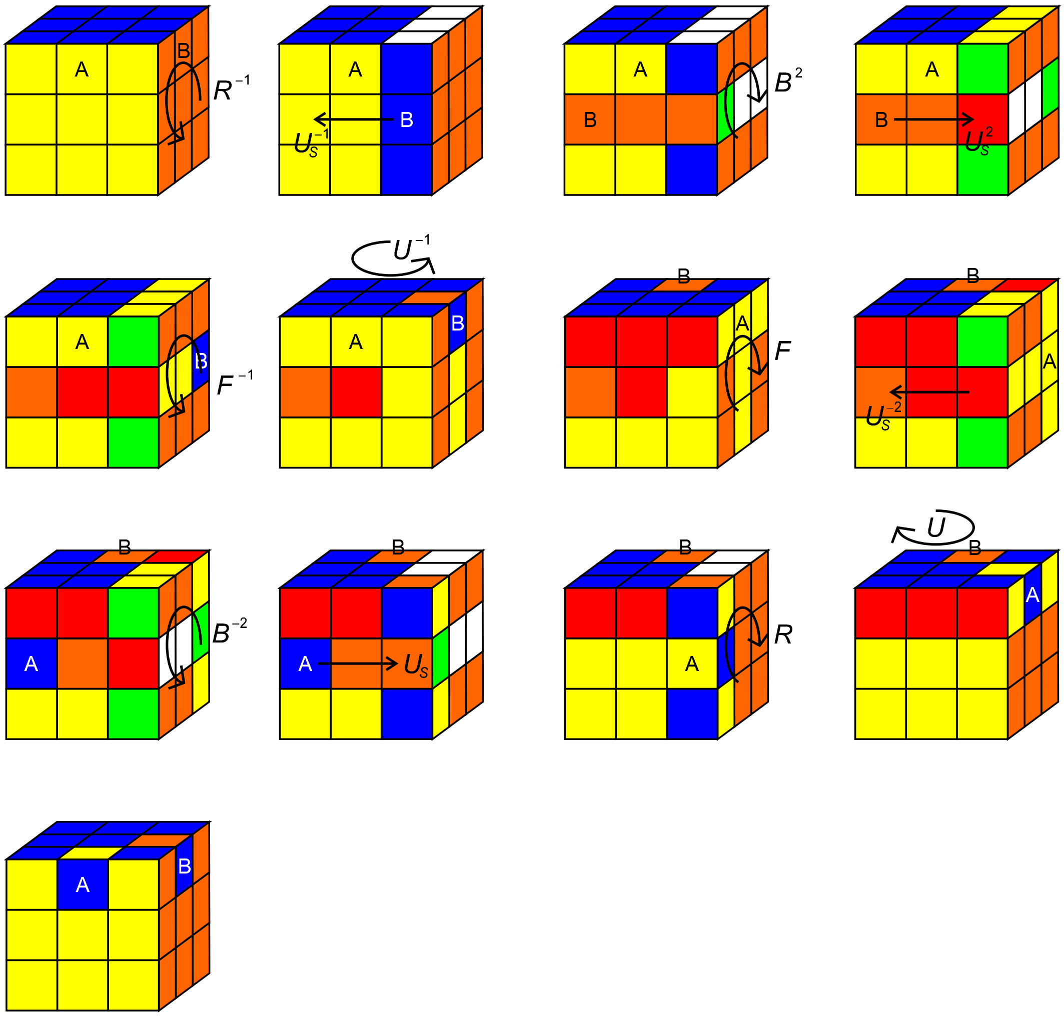
6.4 Algoritmi 4: särmäpalojen kierto

Särmäpalojen kierto on samantapainen kommutaattori kuin nurkkapalojen kierto. Särmäpalaa siirtävä permutaatio σ on edelleen ylätahkon kierto U. Särmäpalan kääntävä permutaatio saadaan yhdistelmästä $\tau = RU_SB^{-2}U_S^{-2}F$. Koko siirtosarja on kommutaattori

$$[\sigma, \tau] = URU_SB^{-2}U_S^{-2}FU^{-1}F^{-1}U_S^2B^2U_S^{-1}R^{-1}.$$

Tämä siirtosarja on esitetty kuvassa 24. Se kääntää ympäri kaksi vierekkäisillä reunoilla sijaitsevaa särmäpalaa (palat A ja B).



Kuva 24: Särmäpalojen kierto

Siirtosarja perustuu siihen, että palan B ruudut ovat ainoat ruudut, joihin sekä

σ että τ vaikuttavat. Näiden siirtojen kommutaattorista tulee siksi pieni ja helposti hallittava. Tarkalleen ottaen siirrot tosin vaikuttavat useampiinkin yhteisiin ruutuihin, koska keskitahkon kääntämisen ajatellaan liikuttavan myös ylätahkoa. Tässä kuitenkin luovutaan hetkeksi siitä ajattelutavasta, niin kuin tehtiin myös luvussa 6.2 särmäpalojen 3-sykliä tarkasteltaessa. Algoritmin siirrot on kuitenkin nimetty alkuperäisiä merkintöjä noudattaen. Esimerkiksi kolmanneksi suoritettava oikean sivutahkon 180 asteen kierto on nimeltään B^2, koska valkoisen keskipalan perusteella kyse on sillä hetkellä valkoisesta sivutahkosta.

6.5 Rubikin asentoryhmän ratkaiseminen

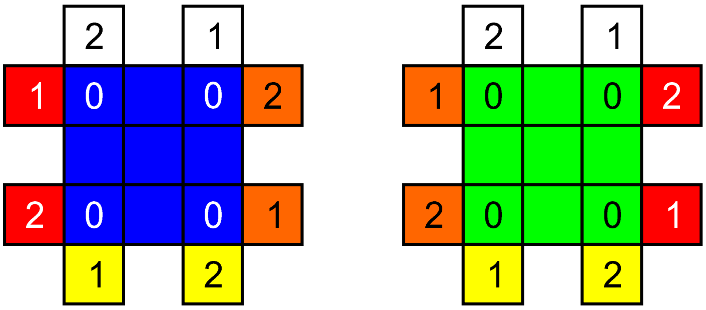
Edellisissä luvuissa on opittu siirtosarjoja, joiden avulla nurkka- tai reunapaloja on mahdollista kiertää paikallaan niin, että yhden palan kiertyessä yhteen suuntaan jokin toinen pala kiertyy samalla päinvastaiseen suuntaan. Tällöin palojen *kokonaiskiertymä* säilyy. Jotta saataisiin kaikki palat oikeaan asentoon, täytyy tutkia, mitä tuolle kokonaiskiertymälle tapahtuu erilaisissa siirroissa. Koska opitut algoritmit eivät muuta kokonaiskiertymää, olisi toivottavaa, että se säilyisi aina samana kaikissa asemissa, joissa palat ovat oikealla paikallaan.

Sellaisisa ominaisuuksia, jotka säilyvät kaikissa tilanteissa, kutsutaan *invarianteiksi*. Invariantteja käytetään runsaasti esimerkiksi pelien ja algoritmien analysoinnissa. Tällä kurssilla on jo löydetty joitakin tällaisia invariantteja. Esimerkiksi jokainen paikkaryhmän siirto voidaan ilmoittaa muodossa $\nu \circ \sigma$, missä ν on nurkkiin ja σ paikkoihin kohdistuva permutaatio (jotka eivät itse välttämättä sisälly $\mathbb{R}_p$:hen). Lemmassa 5.17 osoitettiin, että $\operatorname{sign}(\nu) \cdot \operatorname{sign}(\sigma) = 1$ kaikissa mahdollisissa asemissa, joten tämä etumerkkien tulo on invariantti.

Vaikka jokin ominaisuus ei säilyisi aivan kaikissa tilanteissa, on yleensä hyötyä tarkastella, missä tilanteissa kyseinen ominaisuus kuitenkin säilyy. Paikkaryhmän siirroista tiedetään, että jos ne ilmoitetaan edellä kuvatussa muodossa, $\operatorname{sign}(\nu)$ voi olla 1 tai -1. Perussiirrot kuitenkin vaihtavat tuon etumerkin, joten haluttaessa siirtyä toisesta tilasta toiseen minkä tahansa perussiirron tekeminen riittää. Voidaankin sanoa, että $\operatorname{sign}(\nu)$ on invariantti, jos siirroiksi sallitaan vain kahden perussiirron yhdistelmät.

Peleissä ja algoritmeissa jonkin ominaisuuden invarianssin osoittamiseksi on yleensä yksinkertaisinta näyttää, että kyseinen ominaisuus säilyy algoritmin perusaskelissa. Tämä lähestymistapa tuottaa kuitenkin ongelmia Rubikin asentojen ryhmässä, koska kuution perussiirrot eivät sisälly asentoryhmään. Jos palat ovat oikeilla paikoillaan mutta väärissä asennoissa, mistä tiedetään, miten sarja perussiirtoja vaikuttaa palojen kokonaiskiertymään? Perussiirto vie palat väärille paikoille, joissa niiden kiertymä menettää merkityksensä.

Asian ratkaisemiseksi määritellään jokaiselle palalle kiertymän käsite erikseen jokaisessa paikassa, missä pala voi olla. Tämä määrittely voidaan tehdä lähes miten tahansa, koska väärässä paikassa olevalla palalla ei ole mitään tiettyä oikeaa asentoa, vaan jokainen asento on sille samanarvoinen. Aloitetaan antamalla jokaisen nurkkapalan ruuduille numerointi kuvan 25 osoittamalla tavalla. Kuvassa on perusasemassa oleva kuutio kuvattu ylä- ja alapuolelta niin, että nurkkapalat on ikään kuin taiteltu auki.



Kuva 25: Nurkkapalojen numerointi

Kuvatussa numeroinnissa jokainen nurkkaruutu tulee numeroiduksi jollain luvuista 0, 1 ja 2. Laskujen yksinkertaistamiseksi ajatellaan, että nämä ovat syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_3$ alkioita. Tällöin voidaan nimittäin sanoa, että jos ruudulla x on numero n, niin saman palan muiden ruutujen numerot ovat nurkan ympäri myötäpäivään kierrettäessä $n+1$ ja $n+2$.

Seuraavaksi merkitään ne ruutujen paikat, joissa on perusasemassa 0-ruutu. Tämä tarkoittaa sitä, että ajatellaan merkityiksi kaikki sinisen ja vihreän sivun nurkkaruutujen paikat riippumatta siitä, mikä ruutu niissä milloinkin sattuu olemaan. Jokaisesta palasta on aina täsmälleen yksi ruutu merkityllä paikalla. Näiden merkkien avulla voidaan määritellä nurkkapalojen kiertymät.

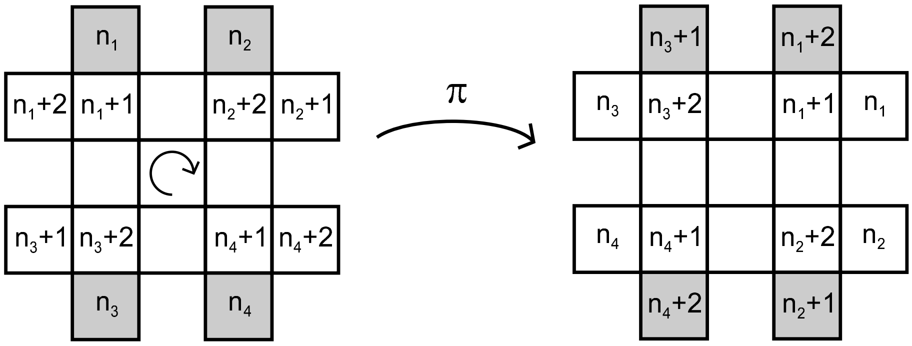
Määritelmä 6.4. Tarkastellaan palan x ruutuja asemassa σ. Palan kiertymä $k_x(\sigma) \in \mathbb{Z}_3$ on sen ruudun numero, joka sattuu olemaan kyseisessä asemassa jollakin merkityistä paikoista. Aseman σ kokonaiskiertymä on kaikkien palojen kiertymien summa, ja sitä merkitään $K_n(\sigma) = \sum_x k_x(\sigma)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että kokonaiskiertymä ei muutu perussiirroissa. Kokonaiskiertymä on siis invariantti.

Lause 6.5. *Olkoon π jokin perussiirto. Tällöin $K_n(\pi \circ \sigma) = K_n(\sigma)$ kaikissa asemissa $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Tutkitaan, miten eri perussiirrot vaikuttavat kokonaiskiertymään. Kaikki merkityt paikat ovat kuution ylä- ja alatahkoilla, joten siirrot U ja D siirtävät kaikki merkityllä paikalla olevat ruudut jollekin toiselle merkitylle paikalle. Nämä siirrot eivät siis vaikuta kokonaiskiertymään lainkaan.

Siirrot F, B, L ja R ovat ruutujen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tarkastella yhtä niistä. Valittu siirto vaikuttaa vain niiden palojen kiertymään, jotka sijaitsevat kierrettävällä sivutahkolla. Nimetään nämä palat numeroilla 1, 2, 3 ja 4 ja merkitään jokaisen palan alkuperäistä kiertymää $k_i(\sigma) = n_i$. Kuvassa 26 näkyy, mitä sivutahkon paloille tapahtuu suoritettaessa perussiirto π. Merkityille paikoille osuvat ruudut on tummennettu.



Kuva 26: Perussiirron vaikutus nurkkapalojen kiertymään

Kuvan mukaan asemassa $\sigma \circ \pi$ saadaan neljän liikkuneen palan kokonaiskiertymäksi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 2) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 2) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6 \qquad (\mathbb{Z}_3\text{:ssa } 6 = 0) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Nurkkapalojen kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa F, B, L tai R. □

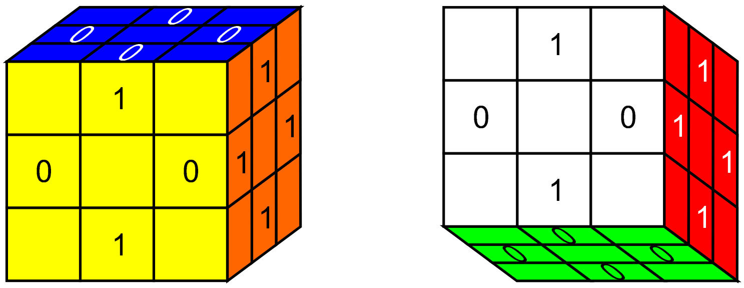
Koska alkuasemassa kokonaiskiertymä on nolla, saadaan edellisestä lauseesta heti seuraava korollaari.

Korollaari 6.6. *Kaikissa asemissa $\sigma \in \mathbb{R}$ pätee $K_n(\sigma) = 0$.*

Nyt saadaan kaikki nurkkapalat oikeisiin asentoihin. Eräs tapa tehdä tämä olisi valita aina kaksi väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, konjugoida ne vierekkäisiksi ja kiertää toinen niistä oikeaan asentoon. Tällä tavalla oikeassa asennossa olevien palojen määrä lisääntyy koko ajan, joten lopulta kaikki palat ovat oikeassa asennossa. Missään vaiheessa jäljellä ei voi olla vain yhtä väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, koska tällöin nurkkien kokonaiskiertymä olisi nollasta poikkeava.

Toinen tapa saada nurkat oikeisiin asentoihin ei vaadi konjugointia. Siinä järjestetään nurkkapalat aluksi jonoon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jossa sama pala voi esiintyä useammin kuin kerran, mutta kaksi peräkkäistä palaa sijaitsevat aina vierekkäin (eli samalla särmällä). Tämän jälkeen käydään läpi paloja jonon alusta lähtien. Aina kun löydetään väärin päin oleva pala x_k, missä $k < n$, käytetään opittua algoritmia paloihin x_k ja x_{k+1}, niin että pala x_k tulee oikeaan asentoon. Lopulta kaikki palat $x_1, \dots, x_{n-1}$ ovat oikeassa asennossa, ja koska kokonaiskiertymän on oltava nolla, myös x_n on oikeassa asennossa.

Reunapalojen tapauksessa menetellään aivan samalla tavalla kuin nurkkapaloilla. Tarvittava ruutujen numero näkyy kuvasta 27, jossa kuutio on kuvattu perusasemassa edestä ja takaa. Ruutujen numeroiden ajatellaan nyt kuuluvan ryhmään $\mathbb{Z}_2$. Nollaruutuja ovat kaikki siniset ja virheät ruudut ja niissä paloissa, joissa kumpiakaan ei esiinny, keltaiset tai valkoiset ruudut.



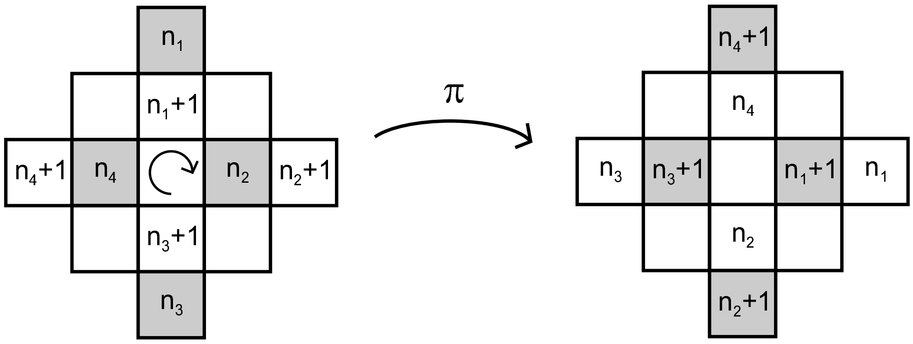
Kuva 27: Reunapalojen numerointi

Samoin kuin aikaisemmin, perusasemassa olevien nollaruutujen paikat merkitään, ja palan x kiertymä $k_x(\sigma)$ määräytyy siitä, mikä palan ruuduista sattuu olemaan merkityllä paikalla. Aseman σ kokonaiskiertymä $K_s(\sigma)$ on kaikkien palojen kiertymien summa.

Lause 6.7. *Särmäpalojen kokonaiskiertymä $K_s(\sigma)$ ei muutu perussiirroissa.*

Todistus. Käydään kaikki perussiirrot läpi. Siirrot U ja D siirtävät jokaisen merkityllä paikalla olevan ruudun jälleen merkitylle paikalle, joten ne eivät muuta kokonaiskiertymää. Toisaalta siirrot L ja R siirtävät jokaisen *merkitsemättömällä* paikalla olevan ruudun jälleen merkisemättömälle paikalle, joten kokonaiskiertymä ei niissäkään muutu.

Jäljelle jää tutkia, mitä tapahtuu siirroissa F ja B. Ne ovat palojen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tutkia toista niistä. Nimetään siirtoon osallistuvat särmäpalat numeroilla 1, 2, 3 ja 4 ja merkitään näiden kiertymiä alkuperäisessä asemassa $k_i(\sigma) = n_i$. Kuvassa 28 on näytetty, miten perussiirto vaikuttaa palojen kiertymiin. Särmäpalat on taiteltu auki ja merkityillä paikoilla sijaitsevat ruudut on tummennettu.



Kuva 28: Perussiirron vaikutus särmäpalojen kiertymään

Kuvasta nähdään, että tarkasteltavien neljän palan kiertymien summaksi tulee uudessa asemassa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 1)\\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \qquad (\mathbb{Z}_2\text{:ssa } 4 = 0)\\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Reunapalojen kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa L tai R. $\square$

Särmäpalat voidaan nyt saada oikeisiin asentoihin samalla periaatteella kuin reunapalatkin.

7 Rubikin kuution laajennoksia

Tavallista Rubikin kuutiota voidaan laajentaa monilla tavoilla. Ensi näkemältä nämä uudet versiot vaikuttavat paljon hankalammilta ratkaista, mutta tarkempi tarkastelu osoittaa, että samat perusideat ovat edelleen voimassa monimutkaisemmissakin muunnelmissa.

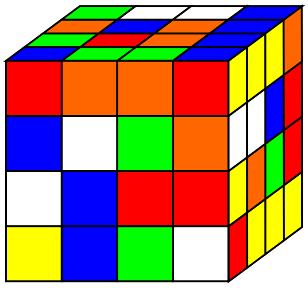
7.1 Suuremmat kuutiot

Ensimmäiseksi mieleen tuleva tapa laajentaa kuutiota on lisätä särmän pituutta. Tällä tavalla saadaan muun muassa suositut $4 \times 4 \times 4$- ja $5 \times 5 \times 5$-kuutiot. Vaikka ruutujen määrä — ja samalla myös mahdollisten asemien määrä — kasvaa näissä laajennoksissa huimasti, kuution perusrakenne säilyy kuitenkin samana. Siksi tällä kurssilla osoitettuja tuloksia voidaan yleensä soveltaa sellaisinaan. Esimerkiksi nurkkapaloja on edelleen kahdeksan kappaletta, ja jokainen perussiirto on nurkkapalojen paikkojen suhteen pariton permutaatio. Kommutaattoreilla voidaan tuottaa paikkojen 3-syklejä sekä erilaisia asentoryhmän siirtoja, ja palojen kokonaiskiertymistä saadaan invariantteja samaan tapaan kuin yksinkertaisemmassakin kuutiossa.

Suuremmissa kuutioissa keskipalatkin saavat merkityksen. Jos särmän pituus on pariton, kuutiossa on joka tahkolla yksi keskimmäinen pala, jonka voi ajatella pysyvän aina paikallaan. Tästä keskimmäisestä palasta voi päätellä kunkin sivun värin missä tahansa asemassa. Jos särmän pituus on enemmän kuin kolme, on kuutiossa kuitenkin useampiakin keskipaloja, jotka koostuvat vain yhdestä ruudusta, ja näiden paikalleen saaminen vaatii omanlaisensa siirtosarjat. Siirtosarjoihin tarvitaan nyt myös keskitahkojen siirtoja, joita ei enää voida jättää huomiotta. Kommutaattorit kuitenkin tehoavat edelleen, ja tilannetta helpottaa se, että kukin keskipala voi olla vain yhdessä asennossa.

Kuutiossa, jonka särmän pituus on parillinen, ei sen sijaan ole sellaisia keskimmäisiä paikallaan pysyviä paloja, joista voisi aina tarkistaa kuution sivujen oikean värin. Tällaisessa tapauksessa voidaan kuitenkin turvautua nurkkapaloihin. Nurkkapalojen rakenteesta johtuen kuutiossa vastakkaisten sivutahkojen värit on aina määrätty. Jos perusasemassa valkoinen sivu on keltaista vastassa, ei kuutiossa voi olla nurkkapalaa, jossa olisi sekä valkoinen että keltainen ruutu. Täten valkoinen ja keltainen sivu eivät voi ikinä olla vierekkäin. Kuution sivujen määräämiseksi riittää siis valita yksi nurkkapala, esimerkiksi sini-kelta-punainen. ja ajatella tuon nurkkapalan olevan aina oikealla paikallaan. Näin selviää, missä sininen, keltainen ja punainen sivu sijaitsevat kussakin asemassa, ja muut sivut ovat näille vastakkaisia. Kuvassa 29 on $4 \times 4 \times 4$-kuutio, jonka nurkkapalasta näkyy, että kuution punainen sivu on katsojaan päin ja sininen sivu ylöspäin. Takasivu on tällöin oranssi, vasen sivu valkoinen ja alasivu virheä.

Parillissärmäisillä kuutioilla on toinenkin erikoispiirre. Keskitahkojen siirrot voidaan nimittäin jakaa reuna- ja keskipaloja liikuttaviin osiin, joista edellinen on pariton permutaatio ja jälkimmäinen parillinen. Parillinen keskipalojen siirto voidaan tuottaa 3-syklien avulla, joten myös reunapalojen pariton permutaatio on mahdollinen siirto. Tällaisilla kuutioilla voidaankin tehdä esimerkiksi kahden reunapalan vaihto, joka ei onnistu paritonsärmäisillä kuutioilla.



Kuva 29: $4 \times 4 \times 4$-kuutio, “Rubikin kosto”

Särmän pituuden lisääntyessä käytännön ongelmaksi tulee ratkaisualgoritmin pituus. Kuutiossa, jonka särmän pituus on kuusi, on jo 96 keskipalaa. Näiden kaikkien paikoilleen saaminen 3-syklien avulla on melkoisen työlästä.

7.2 Muita ruutujen määrään perustuvia laajennoksia

Kuution ruutujen määrää voi lisätä myös tekemällä kuutiosta neli- tai useampiulotteisen. Tällaisten kuutioiden käsitteleminen onnistuu yleensä vain tietokoneen avulla. Ulottuvuuksien lisääntyessä eri pala- ja siirtotyyppejä tulee huimasti lisää, mutta ratkaisun perusideat eivät kuitenkaan muutu.

Toinen peruskuution muunnelma ovat käyttää kuution sijasta erimuotoisia kappaleita. Rubikin kuution tapaisia pelejä voidaan tehdä sekä säännöllisistä että epäsäännöllisistä monitahokkaista, ja näiden avulla saadaan aikaan monenlaisia algebrallisia struktuureja. Kuitenkin niin kauan kuin on mahdollista tuottaa 3-syklejä, voidaan ratkaisua aina lähestyä niiden avulla. Siirtojen parillisuuskysymykset voivat erimuotoisissa kuutioissa sen sijaan olla hyvinkin erilaisia.

7.3 Superkuutio

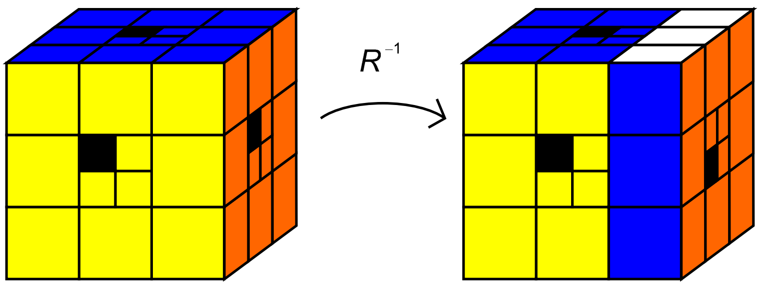
Edellä mainituissa Rubikin kuution muunnelmissa on sama tavoite kuin perinteisessä kuutiossa: saada erivängiset ruudut samoille paikoille kuin perusasemassa. Kyse on siis ruutujen paikkojen permutaatioista. Jos ruutuja on n kappaletta, kuution siirtoja vastaavan permutaatioryhmän voi ajatella symmetrisen ryhmän S_n aliryhmäksi, olipa kyse sitten tavallisesta kolmiulotteisesta kuutiosta tai vaikkapa seitsenulotteisesta ikosaedrista.

Yksi mahdollisuus perustavoitteen muunnelmaksi on tarkastella keskipalojen asentoja. Nurkka- ja reunapalojen asennot määräytyvät, kun niiden ruudut asettaa oikealle paikalleen. Keskipaloissa on kuitenkin vain yksi ruutu, ja keskipalaa voi siksi kiertää itsensä ympäri, ilman että mikään ruutu joutuu väärälle paikalle. Jos tavoitteeksi otetaan myös keskipalojen asentojen palauttaminen samaksi kuin alussa, saadaan ns. *superkuutio-ongelma.*

Tarkastellaan lähemmin $3 \times 3 \times 3$-kuution superkuutio-ongelmaa. Koska kyse ei enää ole pelkästään ruutujen paikoista, ei voida ajatella eri asemien muodostavan aliryhmää kaikkien ruutujen permutaatioiden ryhmässä S_{54}, kuten aiemmin tehtiin. Algebralliseen perusstruktuuriin tarvitaan siis jonkinlainen laajennos, toisin kuin ruutujen määrään perustuvissa Rubikin kuution muunnelmissa.

Yksi vaihtoehto perusstruktuurin laajentamiseksi on seuraava: Koska keskipalojen voidaan edelleen ajatella pysyvän kaikissa siirroissa paikoillaan ja keskipaloja koskevat siirrot ovat riippumattomia muita paloja koskevista siirroista, voidaan haluttu laajennos toteuttaa tuloryhmänä. Kukin keskipala voi olla neljässä eri asennossa, ja nämä asennot voidaan ajatella numeroiduiksi syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_4$ alkioilla. Tällä tavalla saadaan laajennetuksi ryhmäksi suora tulo $S_{48} \times \mathbb{Z}_4^6$, jossa on ensimmäisenä tekijänä nurkka- ja reunaruutujen permutaatioryhmä ja seuraavina kaikkien kuuden keskipalan asentoryhmät.

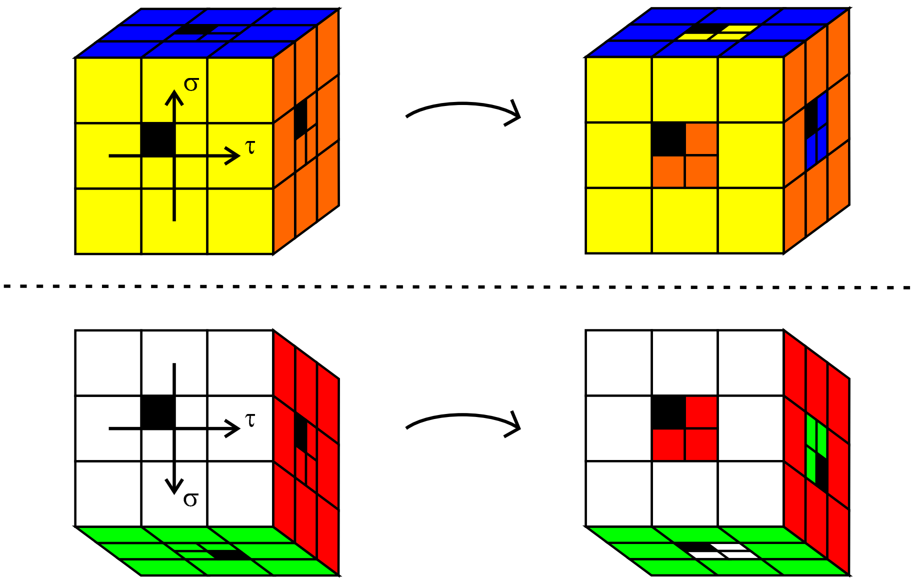
Toinen mahdollisuus on lisätä kuutioon keinotekoisia ruutuja. Jos ajatellaan myös jokainen keskipala jaetuksi neljään ruutuun, jotka sijaitsevat kaikki samalla sivulla, voidaan näiden valeruutujen paikoista päätellä keskipalan asento. Tällainen jako on esitetty kuvassa 30, josta näkyy samalla, miten perussiirto vaikuttaa keskipalan asentoon. Yksi keskipalan ruuduista on väritetty mustaksi selvyyden vuoksi. Jakamalla keskipala ruutuihin voidaan jälleen ajatella eri asemien muodostavan aliryhmän kaikkien ruutujen permutaatioiden ryhmässä, mutta nyt ruutuja on yhteensä 64, joten kyse on ryhmän S_{64} aliryhmästä. Tämä ryhmä on kooltaan paljon suurempi kuin ensimmäisen laajennosvaihtoehdon tuloryhmä, mutta koska kyse on nyt vain ruutujen lisäämisestä, voidaan aikaisempia ideoita jälleen käyttää hyväksi.



Kuva 30: Keskipalojen jako ruutuihin ja perussiirron vaikutus keskipalan asentoon

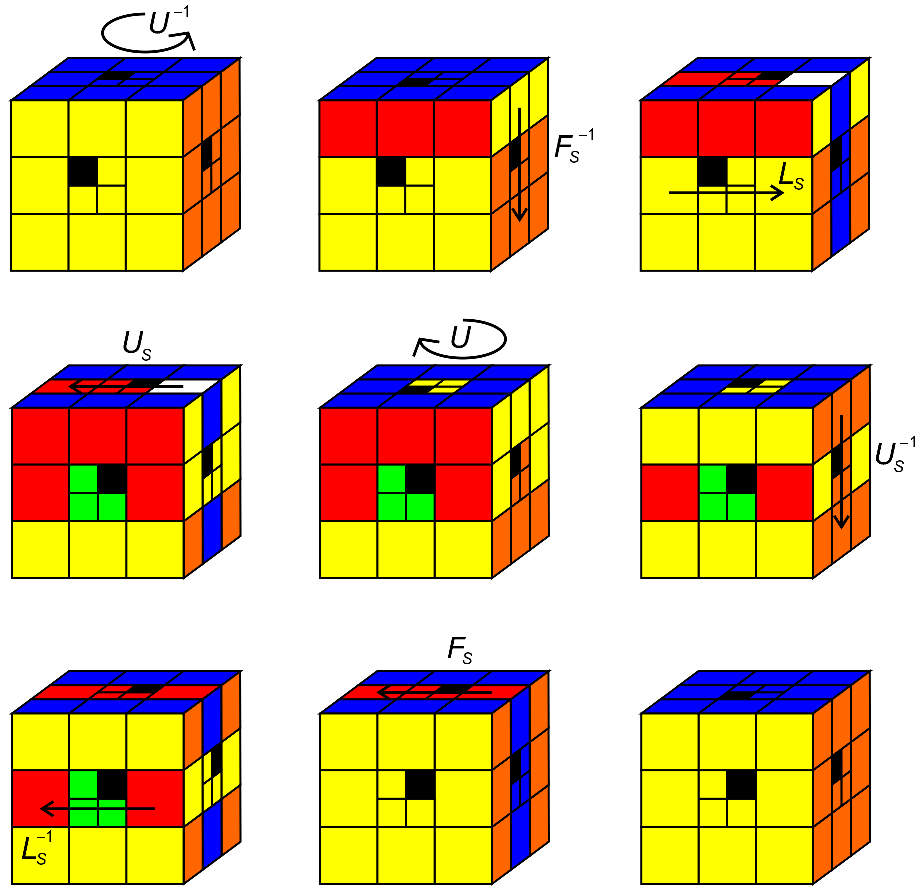
Tutkitaan nyt, minkälaisia kommutaattoreita keskipalan liikkeistä saadaan. Tätä varten luovutaan nyt niistä periaatteesta, että keskipalat pysyisivät aina paikallaan ja keskitahkon kierto tulkittaisiin rinnakkaisten sivutahkojen kierroksi. Perussiirrot (keskitahkojen siirrot mukaanlukien) nimetään kuitenkin edelleen totuttuun tapaan.

Ensinnäkin on huomattava, että jokainen siirto, joka siirtää jonkin keskipalan paikaltaan, siirtää samalla myös vastakkaista keskipalaa. Näin ollen keskipalojen paikkaryhmässä on mahdotonta löytää kahta permutaatiota, joiden yhteiseen kantajaan kuuluisi vain yksi keskipala. Kommutaattoriperiaatteella (lause 6.3) ei siis saada aikaan paikkojen 3-sykliä. Paikkaryhmässä pienin yhteinen kantaja, eli kahden vastakkaisen keskipalan pari, saadaan esimerkiksi valitsemalla siirroiksi kahden eri keskitahkon perussiirrot. Tämä on tähän mennessä esillä olleista kommutaattorisiirroista yksinkertaisin, ja se tuottaa vastakkaisten keskipalojen 3-syklit kuvan 31 mukaisesti. Kuvasta kuutio on kuvattuna edestä ja takaa. Tämä siirtosarja on helppo suorittaa, ja tulos on näyttävä, mutta siirtosarja ei itse asiassa auta keskipalojen oikean asennon löytämisessä.



Kuva 31: Vastakkaisten keskipalojen 3-syklit

Toinen mahdollisuus kommutaattorin tuottamiseen on valita sellaiset siirrot, joista toinen kiertää keskipalaa paikallaan ja toinen siirtää sen johonkin muuhun paikkaan. Kiertäväksi permutaatioksi τ voidaan valita esimerkiksi perussiirto U. Siirtävä permutaatio σ saadaan puolestaan helposti kolmen keskitahkon siirron yhdistelmänä $F_S L_S^{-1} U_S^{-1}$ (oikeastaan konjugaattisiirto). Näistä muodostetun kommutaattorin $[\sigma, \tau]$ tuloksena sininen keskipala kiertyy vastapäivään ja keltainen keskipala myötäpäivään. Siirtosarja on esitetty kuvassa 32. Huomaa, että keskipalojen liikuttaminen vaikuttaa siirtojen merkitsemistapaan, ja siksi esimerkiksi siirto L_S kiertää kuvassa kuution yläpinnan suuntaista keskitahkoa.



Kuva 32: Keskipalojen kierto

Keskipalojen kiertymät $k_x(\sigma)$ voidaan määritellä samaan tapaan kuin luvussa 6.5. Tällöin kukin kiertymä on ajateltava $\mathbb{Z}_4$:n alkioksi. Koska yhden sivutahkon kierto muuttaa vain yhden keskipalan kiertymää yhdellä, keskipalojen kokonaiskiertymä $K_k(\sigma)$ voi olla mikä tahansa luvuista 0, 1, 2 tai 3. Edellä kuvattu siirtosarja ei vaikuta kokonaiskiertymään, joten tarvitaan muitakin siirtoja keskipalojen asentojen ratkaisemiseksi.

Nimitetään tässä yhteydessä *perusasemaksi* sitä asemaa, jossa kaikki palat ovat oikeilla paikoillaan ja oikeissa asennoissa, mukaanlukien keskipalat. Sellaisia asemia, joissa kaikki palat ovat oikeilla paikoillaan ja nurkka- ja reunapalat lisäksi oikeissa asennoissaan, kutsutaan *vanhaksi perusasemaksi*. Vanhasta perusasemasta toiseen siirtyminen vaatii parillisen määrän sivutahkojen perussiirtoja, sillä nämä perussiirrot ovat parittomia permutaatioita, jollei keskipaloja oteta lukuun. (Keskitahkon perussiirto lasketaan tässä jälleen kahdeksi sivutahkon perussiirroksi.) Koska perusasemassa keskipalojen kokonaiskiertymä on 0, täytyy jokaisessa vanhassa perusasemassa kokonaiskiertymän olla joko 0 tai 2.

Edellisen päättelyn nojalla keskipalat saadaan oikeaan asentoon seuraavasti: Ratkaistaan kuutio vanhan mallin mukaan, jolloin päädytään johonkin vanhaan perusasemaan. Keskipalat voivat olla nyt väärissä asennoissa, mutta niiden kokonaiskiertymä on 0 tai 2. Jos se on 0, keskipalat saadaan oikeisiin asentoihin yllä kuvattua siirtosarjaa soveltamalla. Jos kokonaiskiertymä on 2, tehdään ensin kaksi perussiirtoa esimerkiksi kiertämällä yhtä sivutahkoa puoli kierrosta. Tällöin kokonaiskiertymäksi tulee 0. Paikoiltaan siirtyneet nurkka- ja särmäpalat voidaan nyt palauttaa perusasemaan soveltamalla aiemmin opittuja algoritmeja, jotka *eivät vaikuta* keskipalojen kiertymiin. Tuloksena saadaan vanha perusasema, jossa keskipalojen kokonaiskiertymä on 0, ja tähän voidaan jälleen soveltaa keskipaloja kiertävää siirtosarjaa.