Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 1
5.11.2012

1. Tarkastellaan symmetrisen ryhmän S_6 alkioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Laske permutaatiot $\sigma\tau$ ja σ^{-1} sekä ratkaise yhtälö $\sigma\xi\sigma^{-1} = \tau$ muuttujan $\xi \in S_6$ suhteen. Esitä lisäksi permutaatiot σ, τ ja ξ erillisten syklien tuloina.

2. Oletetaan, että σ on jokin äärellisen joukon X permutaatio ja $x \in X$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle pätee $\sigma^n(x) = x$.

3. Laske tulot $\Delta(\sigma)$ ja Δ_4 määritelmän perusteella, kun

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

   Päättele tästä permutaation σ etumerkki. Laske sitten σ:n etumerkki sykliesityksestä lähtien. Laske vielä permutaation τ etumerkki haluamallasi tavalla, kun

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 11 & 2 & 8 & 6 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

4. Osoita, että joukon S_n parillisten permutaatioiden joukko

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$$

   on ryhmän S_n aliryhmä.

5. Oletetaan, että permutaation $\sigma \in S_n$ esityksessä erillisten syklien tulona on r sykliä 1-syklit mukaanluettuina. Näytä, että $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{n+r}$.

6. Numeroi Rubikin kuution ruutujen paikat valitsemallasi tavalla ja esitä jokin Rubikin ryhmän perussiirto erillisten syklien tulona. Laske perussiirron etumerkki.