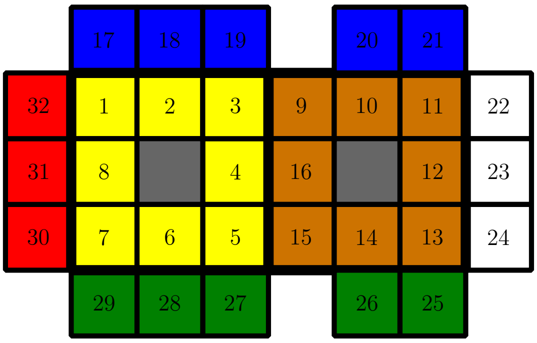
Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 2 (2 sivua)
12.11.2012

1. Tässä tehtävässä tarkastellaan Rubikin kuution perussiirtojen F ja R yhdistelmiä $F^{-1}R$, FR ja $FRF^{-1}R^{-1}$. (Muista että oikeanpuoleinen perussiirto suoritetaan ensin.) Määritä kussakin tapauksessa pienin positiivinen kokonaisluku n (mieluiten kuutiota näpertämällä), joka vie
   a) kaikki nurkkapalojen ruudut takaisin paikoilleen
   b) kaikki särmäpalojen ruudut takaisin paikoilleen
   c) kaikki ruudut takaisin paikoilleen (siirron kertaluku).

   Esitä lisäksi kunkin siirron sykliesitys, kun ruutujen paikat on numeroitu alla olevan kuvan mukaisesti. Kuvassa kaksi vierekkäistä sivutahkoa on levitetty auki. Väritys on perusasemasta, mutta tehtävän voi yhtä hyvin tehdä mistä tahansa asemasta lähtien.



2. Olkoon $H \leq G$ ja olkoot $g_1, g_2 \in G$. Osoita tarkasti, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   a) $g_1 H = g_2 H$
   b) $g_1 \in g_2 H$
   c) $g_1^{-1} g_2 \in H$.

3. Osoita, että asentoryhmä $\mathbb{R}_a$ on vaihdannainen.

4. Luennolla käsitellyn 3-syklin σ avulla voidaan muodostaa muitakin ryhmän $\mathbb{R}_p$ parillisia permutaatioita. Esitä seuraavat permutaatiot siirron σ sekä perussiirron F avulla, kun palojen paikat on numeroitu luentomateriaalin kuvan 10 mukaisesti:

   (a) (368) (b) (16)(38) (c) (18)(36).

5. Olkoon G ryhmä. Alkion $x \in G$ *keskittäjä* ryhmässä G on joukko

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}.$$

Ryhmän G *keskus* puolestaan on joukko

$$\zeta G = \{g \in G \mid gx = xg \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

Näytä, että ryhmän keskus ja jokaisen alkion keskittäjä ovat G:n aliryhmiä. Osoita lisäksi, että keskus on normaali.

6. Vähintään kaksialkioista ryhmää kutsutaan *yksinkertaiseksi*, jos sillä ei ole lainkaan aitoja epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä. Osoita, että neljän alkion parillisten permutaatioiden ryhmä

$$A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$$

ei ole yksinkertainen.

Lisätieto. Itse asiassa ryhmä A_n on yksinkertainen, jos ja vain jos $n = 3$ tai $n \geq 5$. Tällä on syvällinen yhteys siihen, että vain korkeintaan neljännen asteen polynomeilla on yleinen ratkaisukaava.