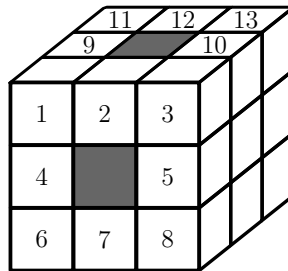


1. Olkoon G ryhmä, H sen osajoukko ja $g \in G$. Todista seuraavat väitteet:
 - a) ${}^gH \leq G$ jos ja vain jos $H \leq G$
 - b) ${}^gH \trianglelefteq G$ jos ja vain jos $H \trianglelefteq G$.
2. Osoita, että jos A ja B ovat konjugaattiluokkia, joille pätee $A \cap B \neq \emptyset$, niin $A = B$. Eri konjugaattiluokat ovat siis erillisiä.
3. Tarkastellaan Rubikin paikkaryhmää \mathbb{R}_p . Numeroidaan kuution palojen paikat oikein kuvan mukaisesti.
 - a) Määritä etutahkon perussiirron F sykliesitys ja etumerkki.
 - b) Osoita, että mikään kahden nurkka- tai särmäpalan vaihto (ab) , missä muut palat eivät liiku, ei ole mahdollinen siirto.
 - c) Luennoilla esitelty 3-sykli on $\sigma = (163)$. Esitä siirto $(6\ 8)(11\ 13)$ tulona permutaatiosta σ sekä sen konjugaateista, kirjoittaen konjugoivat alkioit perussiirtojen yhdistelminä.



4. Määritä ryhmän A_4 konjugaattiluokat.
5. Tarkastellaan *viidentoista peliä*. Siinä on 4×4 -kehikkoon asetettu viisitoista numeroitua neliötä (ks. kuva seuraavalla sivulla). Neliöt voivat liikkua toistensa suhteen niin, että tyhjän paikan vierellä oleva neliö voidaan aina siirtää tyhjään paikkaan (perussiirto). Tavoitteena on saada neliöt palautettua vasemmanpuoleisen kuvan mukaiseen perusasemaan.

Kuvataan pelin siirtoja permutaatioilla kuutiosta tuttuun tapaan, eli numeroidaan paikat luvuin 1–16, ja jos paikassa 1 ollut neliö siirtyy paikkaan 3, ajatellaan permutaation kuvaavan $1 \mapsto 3$ jne. Kuvassa paikkojen numerot ovat ruutujen vasemmissa yläkulmissa.

Osoita, että oikeanpuoleisen kuvan mukaisesta asemasta lähtien peliä on mahdoton ratkaista. (Vihje: tutki ratkaisemiseen tarvittavan permutaation etumerkkiä.)

¹ 1	² 2	³ 3	⁴ 4
⁵ 5	⁶ 6	⁷ 7	⁸ 8
⁹ 9	¹⁰ 10	¹¹ 11	¹² 12
¹³ 13	¹⁴ 14	¹⁵ 15	¹⁶ 16

¹ 1	² 2	³ 3	⁴ 14
⁵ 10	⁶ 6	⁷ 7	⁸ 8
⁹ 9	¹⁰ 4	¹¹ 11	¹² 12
¹³ 13	¹⁴ 5	¹⁵ 15	¹⁶ 16

6. *Lisätehtävä.* (Tähän palataan ehkä myöhemmin.) Etsi ryhmän D_8 kaikki aliryhmät. Mitkä niistä ovat normaaleja? Voit käyttää tietoa, että jokainen aliryhmä, jonka indeksi on 2, on normaali.