Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 4
26.11.2012

1. Etsi neliön symmetriaryhmän D_8 kaikki aliryhmät. Mitkä niistä ovat normaaleja?

2. Tarkastellaan edelleen neliön symmetriaryhmää. Etsi jokaisen alkion $x \in D_8$ keskittäjä ja laske indeksi $[D_8 : C_G(x)]$. Vertaa kutakin indeksiä alkion x konjugaattiluokan kokoon. Mitkä alkioista kuuluvat ryhmän keskukseen?

   Vihje. Edellisestä tehtävästä on hyötyä.

3. Olkoon G ryhmä. Merkitään $Z = \zeta G$. Oletetaan, että tekijäryhmä G/Z on syklinen. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen ja G/Z on itse asiassa triviaali.

   Vihje. Jokainen alkio kuuluu johonkin sivuluokkaan, ja nämä ovat muotoa $x^n Z$ jollain $x \in G$.

4. Olkoon p jokin alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_{p^2}$ eli kertalukua p^2 oleva syklinen ryhmä ei ole minkään kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora tulo.

5. Oletetaan, että σ on joukon X permutaatio. Permutaation σ kantaja määritellään seuraavasti:
$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}.$$
   Kantajaan kuuluvat siis ne alkiot, jotka liikkuvat permutaatiossa paikaltaan. (Toisin sanoen kantaja on kiintopistejoukon komplementti.)

   Olkoot σ ja τ joukon X permutaatioita ja x joukon X alkio. Osoita, että

   a) $\sigma(x) \in \operatorname{supp}(\sigma)$, jos ja vain jos $x \in \operatorname{supp}(\sigma)$
   b) $\operatorname{supp}(\sigma) = \operatorname{supp}(\sigma^{-1})$
   c) $\operatorname{supp}(\sigma \circ \tau) \subset \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$.

6. Osoita, että Rubikin ryhmän keskus sisältyy asentoryhmään $\mathbb{R}_a$.

   Vihje. Kannattaa tehdä vastaoletus ja tutkia, miten konjugointi vaikuttaa siirtoihin.