

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 5
3.12.2012

1. Osoita, että neliön symmetriaryhmä D_8 ei ole minkään epätriviaalien aliryhmiensä (sisäinen) suora tulo.

Neuvo. Aliryhmät on etsitty aikaisemmassa tehtävässä. Tarkista sisäisen suoran tulon ehdot kaikilla sopivan kokoisilla aliryhmäkandidaateilla.

2. Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka konjugaattiluokat ovat K_1, \dots, K_m . Olkoon x_i konjugaattiluokan K_i edustaja jokaisella $i \in \{1, \dots, m\}$. Tarkastellaan vastaavien keskittäjien indeksejä $[G : C_G(x_i)]$.

Osoita, että niiden alkioden x_i lukumäärä, joilla pätee $[G : C_G(x_i)] = 1$, jakaa ryhmän G kertaluvun.

3. Määritä ryhmän A_4 kaikki aliryhmät.

Neuvo. Kannattaa miettiä, minkälaisia ovat kahden 3-syklin tulot. Aliryhmän kertaluku jakaa ryhmän A_4 kertaluvun, joka on 12. Tekijä 6 aiheuttanee eniten ongelmia.

4. Mitkä ryhmän A_4 aliryhmistä ovat normaaleja?

Neuvo. Tarkastele aikaisemmassa tehtävässä määritettyjä konjugaattiluokkia.

5. Määritä ryhmän A_4 alkioden keskittäjät ja ryhmän keskus.

Neuvo. Käytä tietoa, että alkion σ keskittäjän indeksi on sama kuin alkion σ konjugaattiluokan koko. Tämän tiedon avulla saat selville keskittäjien kertaluvut. Muista myös, että jokaisen alkion keskittää ainakin alkio itse ja sen käänteisalkio.

6. *Lisätehtävä.* Ryhmän S_4 aliryhmä

$$V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

on normaali. Tutki tekijäryhmää S_4/V . Mikä on sen kertaluku? Määritä tekijäryhmän S_4/V alkioden kertaluvut ja osoita, että tekijäryhmä ei ole syklinen.