Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 6 (viimeinen harjoitus, 2 sivua)
10.12.2012

1. Osoita, että tuloryhmän $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$ indeksi Rubikin paikkaryhmässä $\mathbb{R}_p$ on täsmälleen kaksi. (Tarkkaan ottaen kyse on oikeastaan tuloryhmän isomorfisesta kuvasta, vrt. lauseeseen 5.18.)

2. Päättele edellisen tehtävän nojalla, mikä on paikkaryhmän $\mathbb{R}_p$ kertaluku.

3. Olkoon G ryhmä ja olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Näiden alkioiden *kommutaattori* on $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Tarkista seuraavat kommutaattorin ominaisuudet:
   i) $[g, h] = e$, jos ja vain jos g ja h kommutoivat keskenään
   ii) $[g, h] = {}^{g}h \cdot h^{-1} = g \cdot {}^{h}(g^{-1})$
   iii) $[g, h] = [h, g]^{-1}$
   iv) ${}^{k}[g, h] = [{}^{k}g, {}^{k}h]$ kaikilla $k \in G$
   v) $[g, h]g = g[h, g^{-1}]$ ja $[g, h]h = h[h^{-1}, g]$.

4. Tarkastellaan luentomateriaalin kuvassa 15 näkyvää C-tyyppistä kolmen nurkkapalan kombinaatiota (mitkään kaksi nurkkapalaa eivät ole vierekkäisissä nurkissa). Käyttäen apuna luentomateriaalin lausetta 6.3, etsi Rubikin ryhmän siirrot σ ja τ, joiden kommutaattori $[\sigma, \tau]$ on noiden kolmen nurkkapalan 3-sykli.

   Vihje. Tutki luentomateriaalin lukua 6.2.

5. Ryhmän G kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää kutsutaan *kommutaattorialiryhmäksi* tai *derivoiduksi aliryhmäksi* ja merkitään G'. Kommutaattorialiryhmä koostuu siis alkioista, jotka ovat muotoa

$$[g_1, h_1]^{s_1}[g_2, h_2]^{s_2} \cdots [g_n, h_n]^{s_n},$$

   missä $g_i, h_i \in G$ ja $s_i = \pm 1$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Todista seuraavat väitteet:
   a) Jokainen ryhmän G' alkio on muotoa

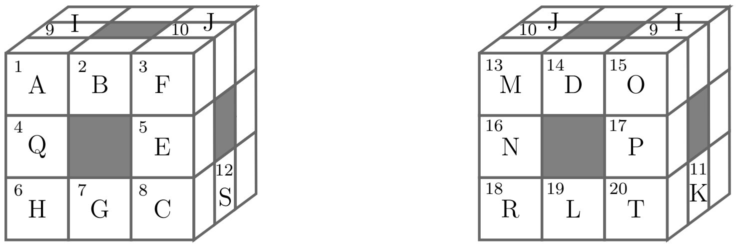
$$[g_1, h_1][g_2, h_2] \cdots [g_n, h_n],$$

   missä $g, h \in G$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   b) Ryhmä G' on ryhmän G normaali aliryhmä.
   c) Tekijäryhmä G/G' on vaihdannainen.

   Vihje. Tehtävästä 3 on apua.

6. *Il Grande Finale.* Merkitään Rubikin kuution palojen paikat numeroin 1–20 oheisen kuvan mukaisesti. Kuvassa sininen sivu on ylöspäin ja keltainen sivu osoittaa katsojaan päin. Oletetaan, että perusasemassa pala A on paikalla 1, pala B paikalla 2 jne.

   Tarkoituksena on löytää siirtosarja, jolla kuvan mukaisesta tilanteesta lähtien saadaan kuution palat palautettua perusasemaan.



   a) Kirjoita ensin tarvittavaa siirtosarjaa vastaavan permutaation sykliesitys.
   b) Osoita, että kuvan asema on tuloryhmässä $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$. (Mitä tekisit, jollei olisi?)
   c) Ratkaise sykliesityksestä, miten tarvittavan siirtosarjan permutaatio voidaan kirjoittaa tulona nurkkapalojen ja särmäpalojen 3-sykleistä. Apuna voit käyttää lauseen 3.12 todistusta.
   d) Kirjoita tarvittavat 3-syklit opittujen perussyklien konjugaattien avulla.