

A. Siirtosarjat

Tässä liitteessä esitetään siirtosarjat, joihin muualla materiaalissa viitataan. Ensin käsitellään paikkaryhmän siirrot, sitten asentoryhmän siirrot.

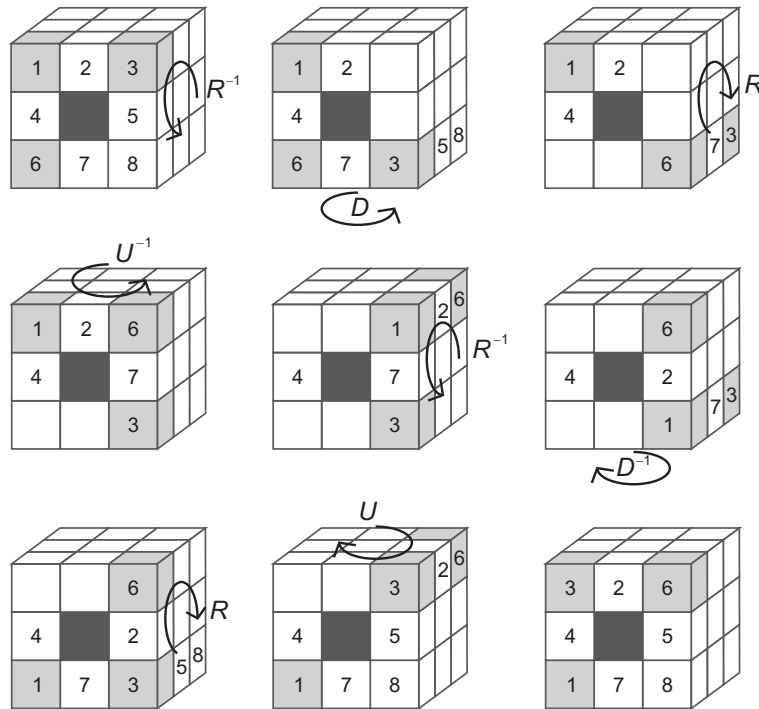
A.1. Nurkkapalojen 3-sykli

Ensimmäinen algoritmi tuottaa 3-syklin paikkaryhmässä \mathbb{R}_p . Tämä sykli on esitelty luvussa 3.3. Se koostuu kahdenlaisista siirroista: ensimmäinen on perussiirto $\sigma = U$ ja toinen kolmen perussiirron yhdistelmä $\tau = RD^{-1}R^{-1}$. Näistä kootaan yhdistelmä $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Kokonaisuudessaan siirtosarja on siis seuraavanlainen:

$$\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = URD^{-1}R^{-1}U^{-1}RDR^{-1}.$$

Tämä siirtosarja, kuten kaikki permutaatioiden tulot, suoritetaan oikealta vasemmalle.

Kuvassa 34 esitetään koko siirtosarja vaihe kerrallaan. Huomaa erityisesti, miten yhdistelmät $\sigma\tau$ ja $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ käsittelevät 3-sykliin kuulumattomia paloja. Nämä palat siirtyvät ensin permutaatioissa $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ jonnekin, mistä ne sitten palaavat takaisin permutaatioissa $\sigma\tau$. Näiden palojen kannalta kyseiset permutaatiot toimivat siis kuin toistensa käänteis-siirrot. Tosiasiassa kuitenkin $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$. Permutaatioiden $\tau\sigma$ ja $\sigma\tau$ (tai niiden käänteisalkioiden) ero tulee näkyviin vain 3-sykliin osallistuvissa paloissa.



Kuva 34: Nurkkapalojen 3-sykli vaiheittain.

Algoritmin opettelu helpottuu, kun huomaa, että permutaatio τ eroaa permutaatiosta τ^{-1} vain siten, että jälkimmäisessä on keskimmäisenä siirtona perussiirto D , edellisessä D^{-1} . Koko sykli voidaan helposti myös kiertää vastakkaiseen suuntaan. Tarvittava käänteisalkio on

$$(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})^{-1} = (\tau^{-1})^{-1}(\sigma^{-1})^{-1}\tau^{-1}\sigma^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}.$$

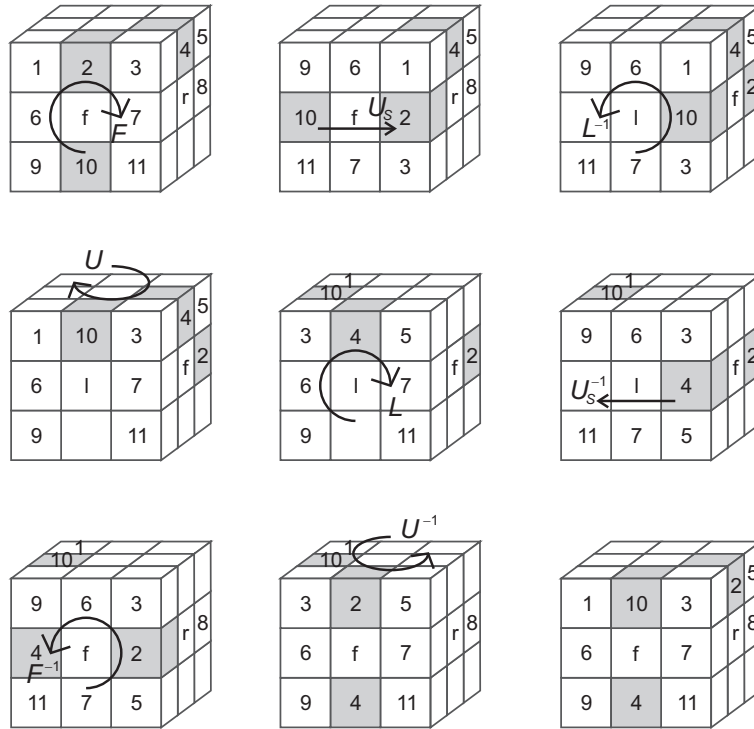
Käänteisalkiossa tehdään siis edelleen ensin käänteissiirrot; eroa alkuperäiseen 3-sykliin on vain se, että σ -siirrot tehdään ennen τ -siirtoja.

A.2. Särmäpalojen 3-sykli

Särmäpaloja kiertävä 3-sykli on esitelty luvussa 5.3. Siirroiltaan se on samankaltainen kuin nurkkapalojen 3-sykli. Se on nimittäin jälleen muotoa $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, missä σ on perussiirto U^{-1} ja τ kolmen siirron yhdistelmä $F^{-1}U_S^{-1}L$. Yhdessä näistä koostuu kuvassa 35 esitetty kahdeksan siirron sarja

$$U^{-1}F^{-1}U_S^{-1}LUL^{-1}U_SF.$$

Siirtosarja suoritetaan tietysti oikealta vasemmalle, aloittaen siirrosta F .



Kuva 35: Särmäpalojen 3-sykli vaiheittain.

Algoritmi on tässä kirjoitettu siirron U_S avulla, joka on kuution keskitalikon siirto. Tämä on tehty sen vuoksi, että siirtosarja olisi helpompi hahmottaa. Toisaalta tästä seuraa, että siirrot F ja L näyttävät nyt kuvassa molemmat pyörittävän etutahkoa, vaikka

todellisuudessa kyseinen ”etutahko” on kääntynyt oikealle siirron U_S vaikutuksesta siinä vaiheessa, kun ruvetaan käyttämään siirtoa L^{-1} , ja tilalle on tullut aiemmin vasemmalla sivulla ollut tahko. Kuvassa tahkoja merkitään keskipalojen kirjaimilla f (etutahko), l (vasemmanpuoleinen tahko) ja r (oikeanpuoleinen tahko).

A.3. Nurkkapalojen kierto

Nurkkapalojen kiertämiseen soveltuva siirto on esitelty luvussa 6.3. Se on kahden siirron kommutaattori $[\sigma, \tau]$ kuten edellisestkin siirrot. Tällä kertaa siirroista toinen kuuluu asentoryhmään ja toinen ei. Paloja siirtävä permutaatio σ on ylätahkon kierto U . Asentoryhmän siirto puolestaan kiertää yhtä nurkkapaloista, ja se on perussiirtojen yhdistelmänä $\tau = RD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}F$. Näistä muodostuu kommutaattori

$$[\sigma, \tau] = URD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}FU^{-1}F^{-1}DFRDR^{-1}.$$

Tämä siirtosarja, joka on esitetty vaihe vaiheelta kuvassa 36, kiertää kahta vierekkäistä nurkkapalaa A ja B vastakkaisiin suuntiin. Pala A kiertyy vastapäivään ja pala B myötäpäivään.

Siirtosarjan voi hahmottaa esimerkiksi seuraavasti. Aluksi tehdään joukko siirtoja, joissa pala B kiertyy myötäpäivään, ja samalla kuution kaksi alinta tahkoa saavat sekoitua miten hyvänsä. Sen jälkeen siirretään pala A palan B paikalle koskematta alempiin tahkoihin ja suoritetaan aiemmat siirrot uudestaan päinvastaisessa järjestyksessä. Nämä siirrot kiertävät nyt palaa A vastapäivään ja asettavat samalla kuution alaosan uudelleen järjestykseen. Lopuksi käännetään palat A ja B alkuperäisille paikoilleen.

Siirto τ , joka kiertää oikeassa ylänurkassa olevaa palaa, on myös itsessään helpointa hahmottaa kahdessa osassa. Molemmat osat ovat samanlaisia konjugaattimuotoisia siirtoja: toinen koskee kuution oikeanpuoleista sivutahkoa, toinen etutahkoa.

A.4. Särmäpalojen kääntö

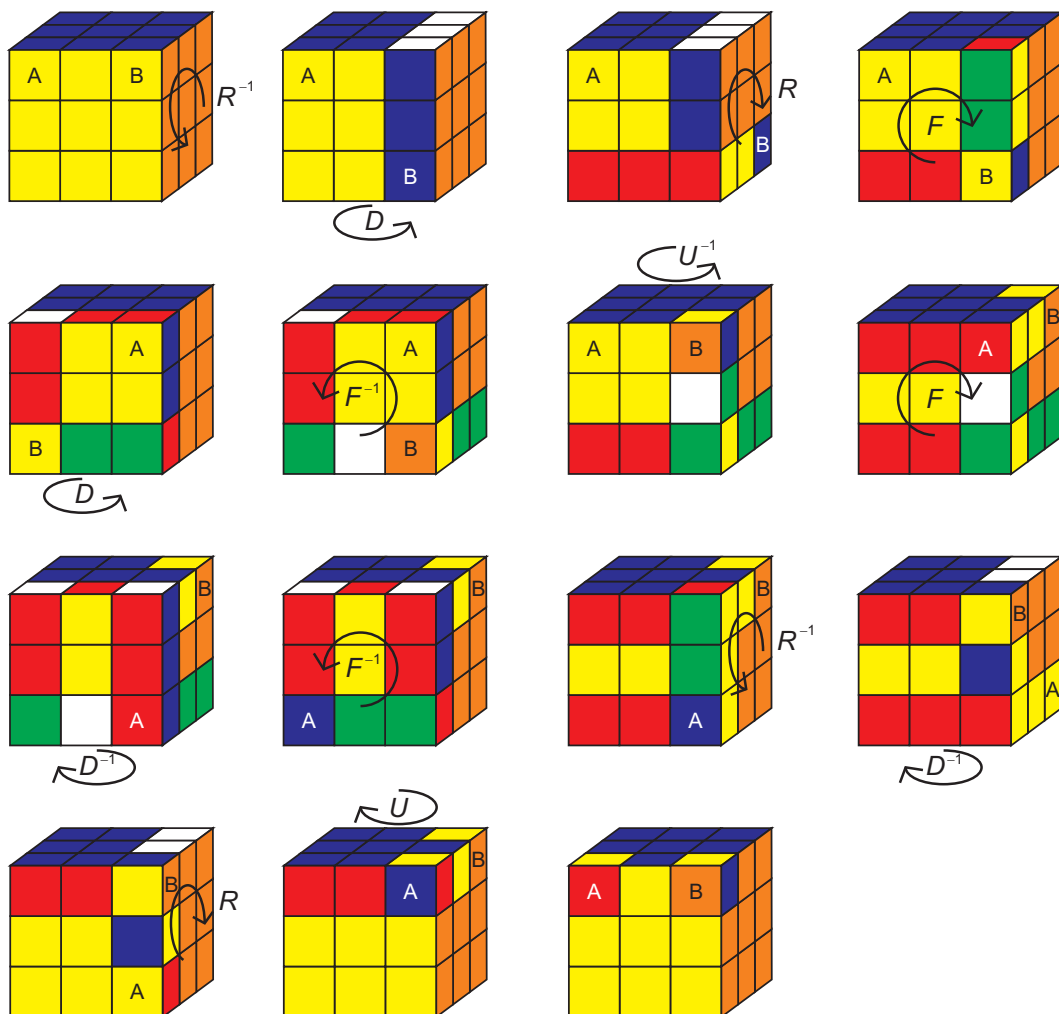
Särmäpalojen kääntäminen onnistuu luvussa 6.4 esitetyllä siirrolla. Tämä on jälleen kahden siirron kommutaattori, joista toinen siirtää särmäpalan paikaltaan ja toinen kääntää sen. Särmäpalaa siirtävä permutaatio σ on edelleen ylätahkon kierto U . Särmäpalan kääntävä permutaatio saadaan yhdistelmästä $\tau = RU_S B^{-2} U_S^{-2} F$. Koko siirtosarja on kommutaattori

$$[\sigma, \tau] = URU_S B^{-2} U_S^{-2} FU^{-1} F^{-1} U_S^2 B^2 U_S^{-1} R^{-1}.$$

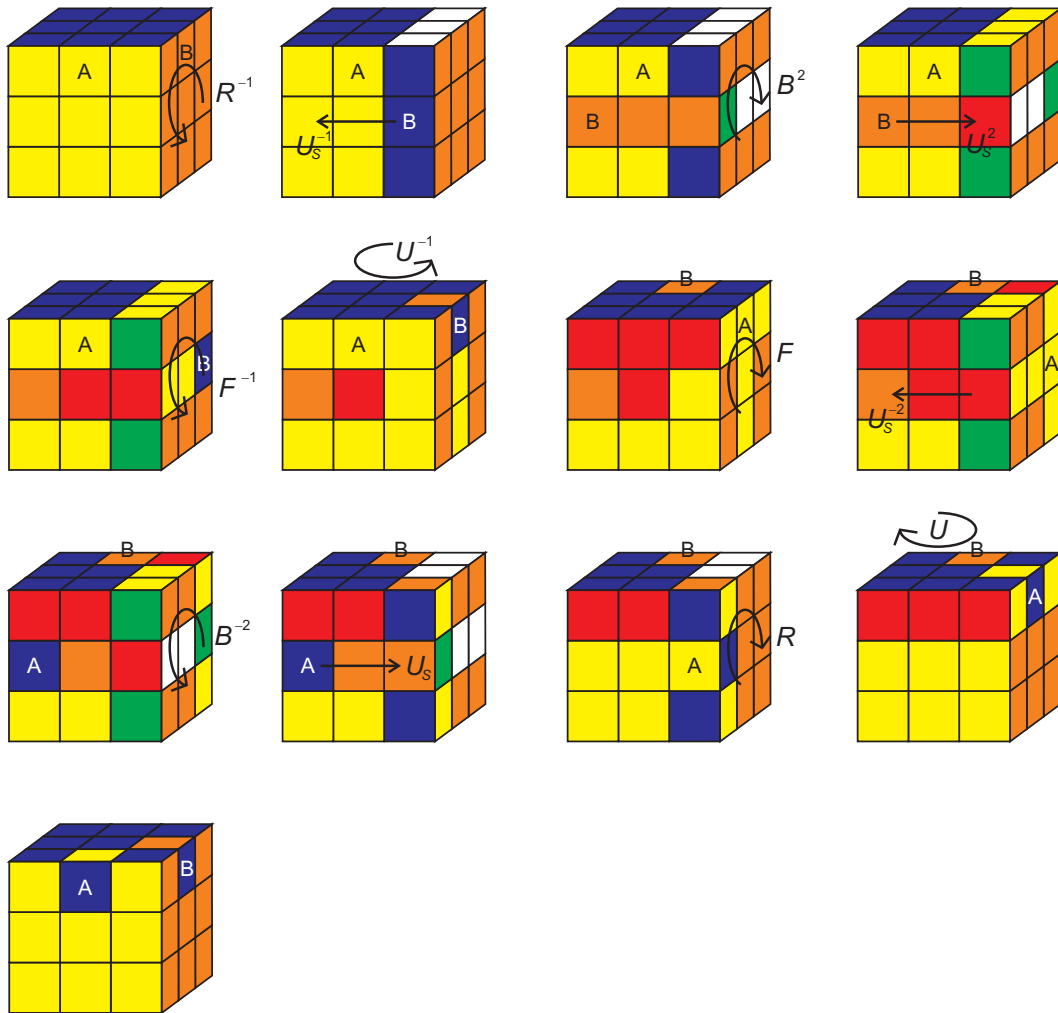
Tämä siirtosarja on esitetty kuvassa 37. Se kääntää ympäri kaksi vierekkäisillä reunoilla sijaitsevaa särmäpalaa (palat A ja B).

Siirtosarja perustuu siihen, että palan B ruudut ovat ainoat ruudut, joihin sekä σ että τ vaikuttavat. Tarkalleen ottaen siirrot tosin vaikuttavat useampiinkin yhteisiin ruutuihin, koska keskitahkon kääntämisen ajatellaan liikuttavan myös ylätahkoa. Tässä kuitenkin luovutaan hetkeksi siitä ajattelutavasta, niin kuin tehtiin myös luvussa 6.2 särmäpalojen 3-sykliä tarkasteltaessa. Algoritmin siirrot on kuitenkin nimetty alkuperäisiä merkintöjä noudattaen. Esimerkiksi kolmanneksi suoritettava oikean sivutahkon 180 asteen kierto

on nimeltään B^2 , koska valkoisen keskipalan perusteella kyse on sillä hetkellä valkoisesta sivutahkosta.



Kuva 36: Nurkkapalojen kierto vaiheittain.



Kuva 37: Särmäpalojen kierto.