Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2008
Korjattu syksyllä 2012

Sain idean tämän kurssin pitämiseen luettuani Jyrki Lahtosen artikkelin *Rubikin kuutio ja permutaatioryhmät* (`http://users.utu.fi/lahtonen/rubik.html`). Olen käyttänyt suoraan tuossa artikkelissa esitettyjä algoritmeja kuution ratkaisemiseksi, vaikka yleisestä teoriasta voidaankin johtaa myös lukuisia muita ratkaisuun sopivia siirtosarjoja. Olen myös lainannut artikkelista idean Rubikin kuution symmetriaryhmän jakamisesta asento- ja paikkaryhmiin sekä menetelmän 3-syklien tuottamiseksi kommutaattoreiden avulla. Muun materiaalin olen tuottanut itse tai ottanut alan peruskirjallisuudesta. Esitetyt todistukset ovat omaa käsialaani.

Jokke Häsä, 2.11.2012

Sisältö

1 Johdanto

1.1 Yleistä

Unkarilainen kuvanveistäjä ja arkkitehtuurin professori Ernő Rubik kehitti maineikkaan kuutionsa vuonna 1974. Kuutio oli alun perin eräänlainen harjoitelma tietyn kolmiulotteisen rakenteen kehittämiseksi, mutta siitä tuli sittemmin maailmankuulu ongelmanratkaisupeli. Rubik kutsui kuutiotaan itse nimellä ”Magic Cube”. Vuonna 1980, kun Ideal Toys esitteli lelun maailmalle, se nimettiin uudelleen Rubikin kuutioksi.

Rubikin kuutio saavutti lyhyessä ajassa suuren suosion, jota se ei ole vieläkään menettänyt. Siitä on tehty monia muunnelmia: erikokoisia, -värisiä ja -muotoisia. Tietokoneen avulla voidaan tarkastella myös useampiulotteisia Rubikin kuutioita.

Todelliset harrastajat käyttävät itse öljyämiään ja virittelemiään kuutioita saavuttaakseen mahdollisimman nopeita tuloksia. Maailmalla kilpaillaan paitsi perinteisessä pyörittelyssä myös muun muassa sokkona, jaloilla ja yhdellä kädellä ratkaisemisessa. Tämänhetkinen (29.10.2012) virallinen nopeusennätys on australialaisella Feliks Zemdegsillä, joka vuonna 2011 ratkaisi kuution nopeimmillaan 5,66 sekunnissa. Myös suomalaiset ovat pärjänneet kuution mani- ja pedipuloinnissa: vielä vuonna 2010 jaloilla ratkaisemisen maailmanennätys kuului Anssi Vanhalalle ja Ville Seppäsellä oli hallussaan maailmanennätykset $4 \times 4 \times 4$- ja $5 \times 5 \times 5$-kokoisten kuutioiden sokkoratkaisussa.[1]

Rubikin kuution ratkaiseminen on päältä katsottuna äärimmäisen monimutkainen ongelma. Erilaisia kombinaatioita tavallisella $3 \times 3 \times 3$-kuutiolla on 43 252 003 274 489 856 000 eli noin $4{,}3 \cdot 10^{19}$ kappaletta. Kuitenkin kuution matemaattinen perusrakenne avautuu melko vähällä vaivalla. Tämän rakenteen selvittämisessä ryhmäteorian perustyökaluista on paljon apua, ja toisaalta kuutio toimii erinomaisena havaintovälineenä abstraktilta tuntuvien algebrallisten käsitteiden oppimisessa.

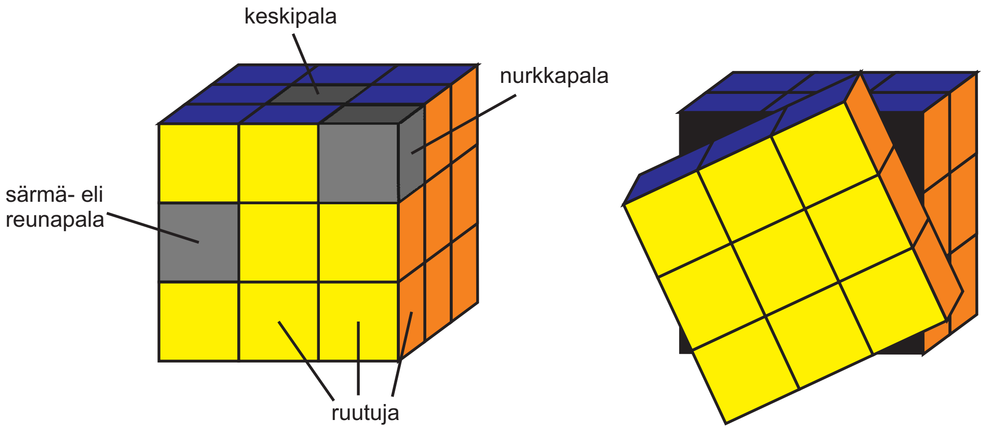
Ratkaisemiseen tarvittava pyöritysten määrä ei ole vielä täsmällisesti selvinnyt. Vuonna 1998 Michael Reid löysi kombinaation, jonka ratkaisemiseen vaaditaan vähintään 26 kappaletta sivutahkon pyöräytyksiä neljännesympyrän verran. (Tällaista pyöräytystä kutsutaan tässä materiaalissa *perussiirroksi* tai perussiirron käänteissiirroksi.) Toisaalta Tomas Rokicki osoitti vuonna 2009, että minkä tahansa aseman ratkaisemiseen tarvitaan korkeintaan 29 tällaista siirtoa. Näiden lukumäärien välissä on vielä tilaa tarkennukselle. Jos sen sijaan myös sivutahkon 180 asteen pyöräytys lasketaan perussiirroksi, tuorein ja samalla lopullinen tulos löytyy heinäkuulta 2010, jolloin Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson ja John Dethridge osoittivat Googlen laskentatehoa käyttäen, että kaikki kuution kombinaatiot voidaan ratkaista 20 siirrolla. Tämä on myös paras mahdollinen tulos, sillä eräiden asemien ratkaiseminen vaatii juuri 20 siirtoa (Michael Reidin tulos vuodelta 1995).[2]

[1] `http://www.worldcubeassociation.org/results/events.php`

[2] Lähteitä löytyy osoitteesta `http://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_solutions_for_Rubik's_Cube`.

1.2 Kuution rakenne

Rubikin kuution jokainen *sivutahko* koostuu yhdeksästä kuutionmuotoisesta palasta, joista 4 on *nurkkapaloja*, 2 *särmä- eli reunapaloja* ja 1 *keskipala*. Sivutahkot kääntyvät keskipisteensä ympäri, mutta muuten paloja ei voi liikuttaa toistensa suhteen. Näennäisesti myös *keskitahkoja* voi kiertää keskipisteensä ympäri, mutta tämä liike voidaan nähdä myös niin, että kaksi keskitahkon rinnalla olevaa sivutahkoa kiertyvät vastakkaiseen suuntaan (minkä jälkeen koko kuutiota käännetään vielä liikkeen suuntaan).



Kuva 1: Kuution rakenne ja sivutahkon pyöritys.

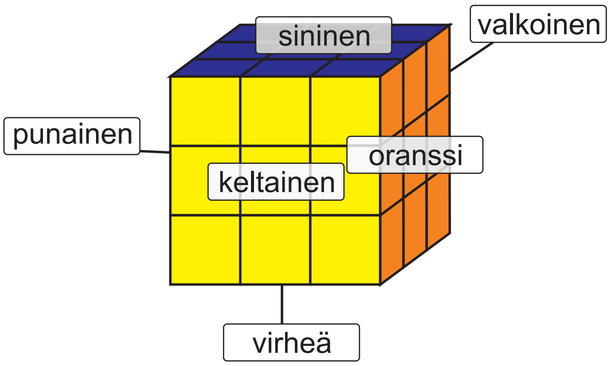
Mitä tahansa yhdistelmää kuution sivutahkojen kääntöjä kutsutaan *siirroksi*. Kaksi siirtoa samastetaan, mikäli niillä päästään tietystä alkutilanteesta samaan lopputilanteeseen.

Kuution sivut on väritetty niin, että perusasemassa jokainen sivu on yksivärinen eikä kahdella eri sivulla esiinny samaa väriä. Jokaisella nurkkapalalla on näin ollen kolme värillistä sivua, joita kutsutaan *ruuduiksi*. Särmäpalat puolestaan sisältävät vain kaksi värillistä ruutua ja kukin keskipala yhden. Kun kuution sivutahkoja kierretään, eriväriset ruudut joutuvat eri sivuille ja kuution värirakenne sekoittuu. Kuution ratkaisemisessa pyritään saamaan jokainen kuution sivu jälleen yksiväriseksi.

Myynnissä olevien kuutioiden väritykset vaihtelevat. Tämän materiaalin puitteissa oletetaan, että sivujen värit ovat keltainen, sininen, punainen, oranssi, virheä ja valkoinen. Nämä värit sijaitsevat kuutiossa siten, että keltainen on vastapäätä valkoista, ja jos keltainen sivu osoittaa katsojaan päin, muut värit kiertävät sivuja myötäpäivään järjestyksessä sininen, oranssi, virheä, punainen (ks. kuva 2).

On hyödyllistä huomioida heti aluksi, että kuution keskipalojen voidaan olettaa pysyvän paikallaan kuution sivuja pyöritettäessä. Kunkin sivutahkon keskipala nimittäin pysyy paikallaan, kun kyseistä sivua pyöritetään[1], eikä tämä pyöritys tietenkään vaikuta mitenkään muiden sivujen keskipalojen asemiin. Toisaalta keskitahkojen pyörittäminen

[1] Keskipalat tosin kiertyvät itsensä ympäri, ja jos niiden alkuperäinen suunta merkitään niihin esimerkiksi kynällä, on lisähaaste yrittää ratkaistaessa palauttaa ne alkuperäisiin asentoihinsa. Tämä tunnetaan "superkuutio"-ongelmana.



Kuva 2: Kuution väritys.

vastaa kahden rinnakkaisen sivutahkon pyörittämistä, joten sekään ei muuta keskipalojen keskinäisiä asemia. Näin ollen kuution jokaisen sivun alkuperäinen väri voidaan tunnistaa sen keskipalasta. Tämä ei ole mahdollista esimerkiksi $4 \times 4 \times 4$-kuutiossa (nimeltään muuten ”Rubikin kosto”), sillä siinä ei ole mitään keskipaloja, jotka pysyisivät paikallaan toistensa suhteen.