6 Kommutaattorit

Ryhmässä kahden alkion kommutaattori on kolmas alkio, joka mittaa alkuperäisten alkioiden vaihdannaisuutta. Jos alkiot kommutoivat keskenään, niiden kommutaattori on neutraalialkio. Kommutaattorit ovat hyödyllinen apuväline epävaihdannaisia ryhmiä tarkasteltaessa.

6.1 Kommutaattorien perusominaisuudet

Jos alkiot g ja h eivät ole keskenään vaihdannaisia, eli ne eivät *kommutoi* keskenään, tulot gh ja hg eroavat toisistaan jollain tavoin. Tällöin löytyy jokin alkio r, jolle pätee $gh = r \cdot hg$. Tämä luku r ilmaisee ikään kuin eri päin laskettujen tulojen välisen suhteen.

Määritelmä 6.1. Olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Yhdistelmää

$$[g, h] = (gh)(hg)^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} \in G$$

kutsutaan alkioiden g ja h *kommutaattoriksi.*

Alkiot g ja h kommutoivat, jos ja vain jos niiden kommutaattori on neutraalialkio. Kommutaattorilla ja konjugaatilla on selvä yhteys, joka ilmenee esimerkiksi kaavoissa

$$[g, h] = {}^{g}h \cdot h^{-1} \quad \text{ja} \quad [g, h] = g \cdot {}^{h}\!\left(g^{-1}\right).$$

Lisäksi seuraavat kaavat ovat kommutaattoreita käsiteltäessä hyödyllisiä:

$$[g, h] \cdot g = g \cdot [h, g^{-1}] \quad \text{ja} \quad [g, h] \cdot h = h \cdot [h^{-1}, g].$$

On myös muistettava, että kommutaattorin laskeminen ei ole symmetrinen operaatio, sillä $[g, h] = [h, g]^{-1}$.

Esimerkki 6.2. Lasketaan permutaatioiden $\sigma = (123)(45)$ ja $\tau = (2345)$ kommutaattori ryhmässä S_5:

$$[\sigma, \tau] = {}^{\sigma}\tau \cdot \tau^{-1} = {}^{(123)(45)}(2345) \circ (2345)^{-1} = (3154) \circ (5432) = (15324).$$

Kommutaattorista tuli 5-sykli, johon osallistuvat kaikki perusjoukon luvut. Voidaan ajatella, että tämä 5-sykli on ”verraten suuri” alkio ryhmässä S_5, mikä tarkoittaa sitä, että permutaatiot σ ja τ kommutoivat hyvin heikosti keskenään.

Paitsi että kommutaattoreita voi käyttää mittaamaan alkioiden välistä kommutointia, niitä voi käyttää myös *tuottamaan* erityisen suuria tai pieniä alkioita. Jos nimittäin löydetään alkiot, jotka näyttävät olevan lähes vaihdannaisia keskenään, niiden kommutaattoriksi saadaan hyvin pieni alkio. Alkion ”suuruus” tai ”pienuus” ei sinänsä ole yleensä ryhmässä selvästi määriteltyä, mutta jos ryhmä koostuu johonkin joukkoon vaikuttavista alkioista, kuten permutaatioista, pieni alkio on sellainen, joka vaikuttaa joukkoon mahdollisimman vähän.

Esimerkiksi kaksi permutaatiota kommutoivat keskenään varmasti, jos ne vaikuttavat kokonaan eri alkioihin. Mitä vähemmän on yhteisiä alkioita, joihin kummatkin vaikuttavat, sitä enemmän permutaatiot kommutoivat ja sitä pienempi on niiden kommutaattori. Kuitenkin jokainen kommutaattori on välttämättä parillinen permutaatio, ja pienin parillinen permutaatio on 3-sykli.

Lause 6.3. *Olkoot σ ja τ jonkin joukon X permutaatioita. Jos kantajien leikkaukselle pätee* $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \{x\}$ *jollain $x \in X$, niin*

$$[\sigma, \tau] = \big(x\ \sigma(x)\ \tau(x)\big).$$

Todistus. Todistuksen seuraamisessa saattaa olla hyötyä kuvasta 22. Näytetään ensin, että ehdosta $\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta) = \{x\}$ seuraa aina $[\alpha, \beta](x) = \alpha(x)$. Huomataan aluksi, että $\beta(x) \in \operatorname{supp}(\beta)$, koska alkion kuva permutaatiossa kuuluu aina permutaation kantajaan. Samaten $\beta^{-1}(x) \in \operatorname{supp}(\beta)$, koska permutaation ja käänteispermutaation kantajat ovat samat. Edelleen $x \in \operatorname{supp}(\beta^{-1})$, joten $\beta^{-1}(x) \neq x$, mistä seuraa, että $\beta^{-1}(x) \notin \operatorname{supp}(\alpha)$. Nyt saadaan

$$[\alpha, \beta](x) = \alpha\beta\alpha^{-1} \underbrace{\beta^{-1}(x)}_{\notin \operatorname{supp}(\alpha)} = \alpha\beta\beta^{-1}(x) = \alpha(x).$$

Koska $\operatorname{supp}(\sigma^{-1}) = \operatorname{supp}(\sigma)$, $\operatorname{supp}(\tau^{-1}) = \operatorname{supp}(\tau)$ ja $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \emptyset$, yllä saadusta tuloksesta sekä luvun alkupuolella mainituista kaavoista seuraa, että

$$\begin{aligned}
&[\sigma, \tau](x) = \sigma(x), \\
&[\sigma, \tau]\big(\sigma(x)\big) = \big(\sigma \circ [\tau, \sigma^{-1}]\big)(x) = \sigma\big(\tau(x)\big) = \tau(x) \quad \text{ja} \\
&[\sigma, \tau]\big(\tau(x)\big) = \big(\tau \circ [\tau^{-1}, \sigma]\big)(x) = \tau\big(\tau^{-1}(x)\big) = x.
\end{aligned}$$

Nyt on näytetty, että permutaatio $[\sigma, \tau]$ sisältää ainakin 3-syklin $\big(x\ \sigma(x)\ \tau(x)\big)$. Jäljelle jää tarkistaa, mitä tapahtuu, jos $y \notin \{x, \sigma(x), \tau(x)\}$. Tällöin voidaan tarkastella kolmea vaihtoehtoa. Jos y ei ole σ:n eikä τ:n kantajassa, niin selvästikin $[\sigma, \tau](y) = y$. Toisaalta ehdosta $y \notin \{x, \sigma(x), \tau(x)\}$ seuraa, että $y \neq x$ ja $x \neq \sigma^{-1}(y)$.

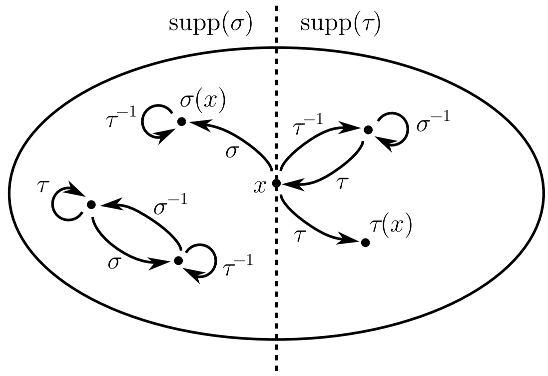
Jos nyt $y \in \operatorname{supp}(\sigma)$, niin y ja $\sigma^{-1}(y)$ eivät kumpikaan voi olla τ:n kantajassa, koska $y \neq x$ ja $\sigma^{-1}(y) \neq x$. Täten

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(y) = \sigma\tau\sigma^{-1}(y) = \sigma\sigma^{-1}(y) = y.$$

Vastaavasti, jos $y \in \operatorname{supp}(\tau)$, niin y ja $\tau^{-1}(y)$ eivät kumpikaan voi olla σ:n kantajassa, joten

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(y) = \sigma\tau\tau^{-1}(y) = \sigma(y) = y.$$

Nähtiin, että aiemmin löydetyn 3-syklin ulkopuoliset alkiot pysyvät paikallaan, joten kommutaattori on juuri tuo mainittu 3-sykli. $\square$



Kuva 22: Kuinka kommutaattorista tulee 3-sykli.

6.2 Kommutaattorit Rubikin ryhmässä

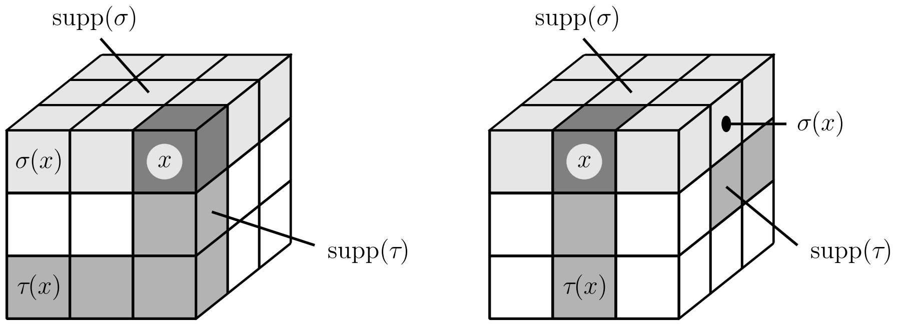
Rubikin kuution ratkaisemisessa keskeinen ongelma on, että perussiirrot liikuttavat niin suurta osaa kuution ruuduista. Kun yksi perussiirto liikuttaa 20 ruutua 48:sta, on hyvin vaikea seurata, mihin kukin ruutu ajautuu. Kommutaattoreita voi tässä yhteydessä käyttää tehokkaasti hyödyksi, sillä niiden avulla saadaan aikaan siirtoja, jotka liikuttavat paljon pienempää osaa kuutiosta kerrallaan. Itse asiassa aiemmin opitut siirtosarjat on muodostettu juuri tällä periaatteella, ja seuraavaksi tutkitaan tarkemmin, miten tämä tapahtuu käytännössä.

Tarkastellaan ensin tilannetta Rubikin paikkaryhmässä. Lauseen 6.3 mukaan voidaan tuottaa kolmen palan sykli, jos vain löydetään kaksi siirtoa, joiden yhteisen vaikutuksen piiriin kuuluu ainoastaan yksi pala. Yritetään saada tämä aikaan nurkkapaloilla niin, että tuloksena olisi luvussa 3.3 opittu nurkkapalojen 3-sykli.

Koska lauseen 6.3 mukaan kahden siirron σ ja τ kommutaattorina on mahdollista saada 3-sykli $(x\ \sigma(x)\ \tau(x))$, on järjestettävä niin, että σ siirtää etutahkon oikeassa yläkulmassa olevan palan vasempaan yläkulmaan, ja τ siirtää saman palan vasempaan alakulmaan (ks. kuva 23). Siirroksi σ voidaan valita vaikkapa ylätahkon pyöritys U. Tämän jälkeen siirron τ on kuitenkin oltava sellainen, että se ei liikuta muita ylätahkon paloja kuin palaa x. Tämä saadaan aikaan *konjugoimalla* alatahkon pyöritys D^{-1}, joka ei liikuta ylätahkoa, sellaisella siirrolla, joka siirtää oikeassa alakulmassa olevan palan x:n paikalle. Näin saadaan siirroksi τ lopulta konjugaatti ${}^{R}D^{-1} = RD^{-1}R^{-1}$.

Särmäpalojen kohdalla tilanne on samanlainen. Opitussa siirtosarjassa siirtoa σ vastaa ylätahkon kierto U^{-1}. Siirron τ pitäisi nyt siirtää pala x alarivin keskipalan paikalle (ks. kuva 23), ilman että ylätahkon palan liikkuvat. Tämä onnistuu konjugoimalla etutahkon kierrolla pystysuoran keskirivin paikalle vaakasuora. Tällöin haluttu siirto muuttuu vaakasuoran keskitahkon siirroksi, joka puolestaan ei koske ylätahkoon.

Tilanne on nyt kuitenkin hieman mutkikkaampi kuin nurkkapalojen tapauksessa, sillä keskitahkon siirtämisen on alun perin tulkittu tarkoittavan rinnakkaisten sivutahkojen liikettä. Vaakasuoran keskitahkon kiertäminen siis liikuttaa oikeastaan myös ylätahkon paloja, mikä ei ollut tarkoitus. Tässä yhteydessä onkin parempi sallia hetkeksi keskitahkojen pyöritykset omiksi siirroikseen, jotka pitävät sivutahkojen palat paikallaan, jotta päästään käyttämään lausetta 6.3. Lauseen nojalla tässäkin tapauksessa saadaan 3-sykli, vaikka tilannetta tulkittiinkin totutusta poikkeavalla tavalla. Lopuksi voidaan sitten nimetä käytetyt siirrot oikeaoppisesti, jolloin siirrosta τ tulee tavallisen konjugaatin sijaan yhdistelmä $\tau = F^{-1}U_S^{-1}L$.



Kuva 23: Paikkaryhmän 3-syklien muodostaminen.

Asentoryhmässä 3-syklejä tuottavan lauseen käyttäminen ei kuitenkaan onnistu. Koska yhden ruudun liikkuessa liikkuvat samalla kaikki saman palan ruudut, ei kahden permutaation kantajien leikkaus voi olla vain yksi ruutu. Pienin mahdollinen kantajien leikkaus sisältää sen sijaan kokonaisen palan kaikki ruudut.

Olkoon A se pala, johon ruutu x kuuluu. Jos siis kaksi siirtoa vaikuttavat molemmat ruutuun x, niiden yhteinen vaikutusalue voi olla pienimmillään palan A ruutujen joukko. Aiemman esimerkin perusteella voitaisiin odottaa, että tällaisten siirtojen kommutaattori olisi mahdollisesti pienin löydettävissä oleva kommutaattori.

Oletetaan seuraavaksi, että Ruikin ryhmän siirtojen σ ja τ kantajien leikkaus sisältää täsmälleen palan A ruudut. Tarkastellaan seuraavaksi, mitkä ehdot siirtojen σ ja τ on toteutettava, jotta niiden kommutaattorista tulisi asentoryhmän siirto, joka vaikuttaisi epätriviaalisti palaan A.

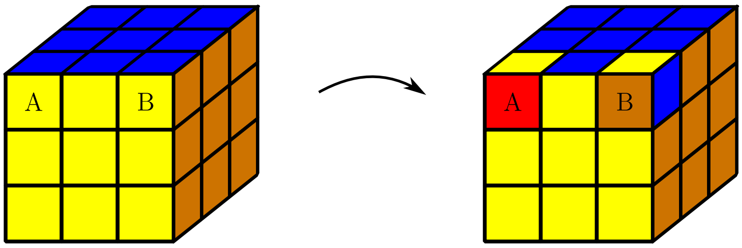
Jos kumpikaan siirroista σ ja τ ei liikuta palaa A paikaltaan, ne ovat molemmat tuon palan ruutuihin rajoitettuina syklejä. Tällaiset siirrot kommutoivat keskenään palan A kohdalla, joten niiden kommutaattori ei liikuta lainkaan kyseisen palan ruutuja. Jos taas molemmat siirrot liikuttavat palaa A, voidaan tarkastella vastaavia paikkaryhmän siirtoja $\sigma\mathbb{R}_a$ ja $\tau\mathbb{R}_a$. Näiden paikkaryhmän siirtojen kantajien leikkaus on pala A, siis yksiö, joten lauseen 6.3 nojalla kommutaattorista $[\sigma\mathbb{R}_a, \tau\mathbb{R}_a]$ tulee 3-sykli, joka liikuttaa palan A paikaltaan. Täten kommutaattori $[\sigma, \tau]$ ei kuulu asentoryhmään.

Ainoa jäljellä oleva vaihtoehto on, että toinen siirroista liikuttaa palaa A ja toinen ainoastaan vaihtaa sen ruutujen järjestystä. Tällaisessa tilanteessa syntyvä kommutaattori kuuluu asentoryhmään, mikä voidaan nähdä esimerkiksi siitä, että asentoryhmä on normaali aliryhmä. Kommutaattori $[\sigma, \tau]$ voidaan nimittäin kirjoittaa muodossa ${}^{\sigma}\tau \cdot \tau^{-1}$, joten jos τ on asentoryhmän siirto, koko kommutaattori kuuluu asentoryhmään.

6.3 Algoritmi 3: nurkkapalojen kierto

Nurkkapalojen kierron tuottavan siirtosarjan muodostaminen perustuu edellisen luvun päätelmiin. Siirtosarja on kahden siirron kommutaattori, joista toinen kiertää nurkkapalaa ja toinen siirtää sitä paikaltaan. Toinen siirroista siis kuuluu asentoryhmään ja toinen ei.

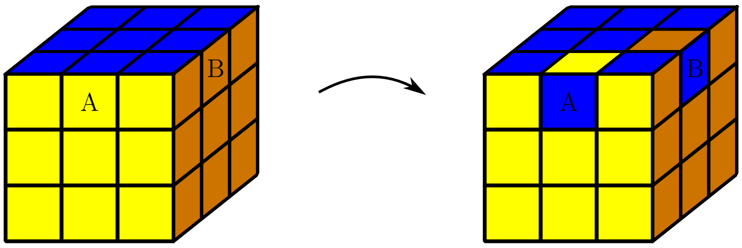
Siirto kiertää kiertää kahta vierekkäistä nurkkapalaa vastakkaisiin suuntiin. Tulos on esitetty kuvassa 24. Pala A kiertyy vastapäivään ja pala B myötäpäivään. Siirtosarjan vaiheet löytyvät liitteestä A.3.



Kuva 24: Nurkkapalojen kierto.

6.4 Algoritmi 4: särmäpalojen kääntö

Särmäpalojen kääntö on samantapainen kahden siirron kommutaattori kuin nurkkapalojen kierto: toinen siirroista kääntää yhden särmäpalan ja toinen siirtää sen paikaltaan. Syntyvä siirtosarja kääntää kaksi samaa nurkkapalaa reunustavaa särmäpalaa ympäri, ja tulos on esitetty kuvassa 25. Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät liitteestä A.4.



Kuva 25: Särmäpalojen kääntö.

6.5 Rubikin asentoryhmän ratkaiseminen

Edellisissä luvuissa on esitetty siirrot, joiden avulla nurkka- ja reunapaloja on mahdollista kääntää paikallaan niin, että yhden palan kiertyessä yhteen suuntaan jokin toinen pala kiertyy samalla päinvastaiseen suuntaan. Tällöin palojen yhteenlaskettu kiertymä eli *kokonaiskiertymä* säilyy. Jotta saataisiin kaikki palat oikeaan asentoon, täytyy tutkia, mitä tuolle kokonaiskiertymälle tapahtuu erilaisissa siirroissa. Koska opitut palojen asentoa muuttavat algoritmit eivät muuta kokonaiskiertymää, olisi toivottavaa, että se säilyisi aina samana kaikissa asemissa, joissa palat ovat oikealla paikallaan. Muuten opitut algoritmit eivät riittäisi asentojen ratkaisemiseen.

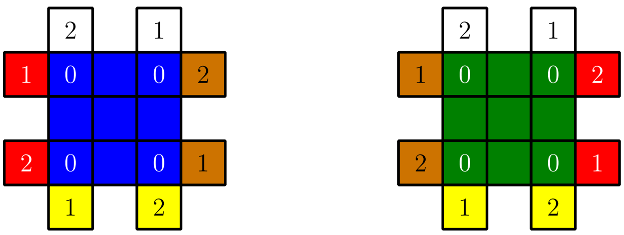
Sellaisia ominaisuuksia, jotka säilyvät kaikissa tilanteissa, kutsutaan *invarianteiksi*. Invariantteja käytetään runsaasti esimerkiksi pelien ja algoritmien analysoinnissa. Tällä kurssilla on jo löydetty joitakin tällaisia invariantteja. Esimerkiksi jokainen paikkaryhmän siirto voidaan ilmoittaa muodossa $\nu \circ \sigma$, missä ν on nurkkiin ja σ paikkoihin kohdistuva permutaatio (jotka eivät itse välttämättä ole laillisia paikkaryhmän siirtoja). Lemmassa 5.17 osoitettiin, että $\operatorname{sign}(\nu) \cdot \operatorname{sign}(\sigma) = 1$ pätee kaikissa mahdollisissa asemissa, joten tämä etumerkkien tulo on invariantti.

Vaikka jokin ominaisuus ei säilyisi aivan kaikissa tilanteissa, on yleensä hyödyksi tarkastella, missä tilanteissa kyseinen ominaisuus kuitenkin säilyy ja millä tavoin ominaisuutta voidaan muuttaa. Paikkaryhmän siirroista tiedetään, että jos ne ilmoitetaan edellä kuvatussa muodossa, $\operatorname{sign}(\nu)$ voi olla 1 tai -1. Perussiirrot kuitenkin vaihtavat tuon etumerkin, joten haluttaessa siirtyä yhdestä tilasta toiseen minkä tahansa perussiirron tekeminen riittää. Voidaan myös sanoa, että $\operatorname{sign}(\nu)$ on invariantti, jos siirroiksi sallitaan vain kahden perussiirron yhdistelmät.

Peleissä ja algoritmeissa jonkin ominaisuuden invarianssin osoittamiseksi on yleensä yksinkertaisinta näyttää, että kyseinen ominaisuus säilyy algoritmin perusaskelissa. Tämä lähestymistapa tuottaa kuitenkin ongelmia Rubikin asentojen ryhmässä, koska kuution perussiirrot eivät sisälly asentoryhmään. Jos palat ovat oikeilla paikoillaan mutta väärissä asennoissa, mistä tiedetään, miten sarja perussiirtoja vaikuttaa palojen kokonaiskiertymään? Perussiirto vie palat väärille paikoille, joissa niiden kiertymä menettää merkityksensä.

Asian ratkaisemiseksi määritellään jokaiselle palalle kiertymän käsite erikseen jokaisessa paikassa, missä pala voi olla. Tämä määrittely voidaan tehdä lähes miten tahansa, koska väärässä paikassa olevalla palalla ei ole mitään tiettyä oikeaa asentoa.

Aloitetaan antamalla jokaisen nurkkapalan ruuduille numerointi kuvan 26 osoittamalla tavalla. Kuvassa on perusasemassa oleva kuutio kuvattu ylä- ja alapuolelta niin, että nurkkapalat on ikään kuin taiteltu auki.



Kuva 26: Nurkkapalojen numerointi.

Kuvatulla tavalla jokainen nurkkaruutu tulee numeroiduksi jollain luvuista 0, 1 ja 2. Laskujen yksinkertaistamiseksi ajatellaan näitä lukuja jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_3$ alkioina. Tällöin voidaan nimittäin sanoa, että jos ruudulla x on numero n, niin saman palan muiden ruutujen numerot ovat nurkan ympäri myötäpäivään kierrettäessä $n+1$ ja $n+2$.

Seuraavaksi *merkitään* ne ruutujen paikat, joissa on perusasemassa 0-ruutu. Tämä tarkoittaa sitä, että ajatellaan merkityiksi kaikki sinisen ja vihreän sivun nurkkaruutujen paikat riippumatta siitä, mikä ruutu niissä milloinkin sattuu olemaan. Jokaisesta nurkkapalasta on aina täsmälleen yksi ruutu merkityllä paikalla. Näiden merkkien avulla voidaan määritellä nurkkapalojen kiertymät.

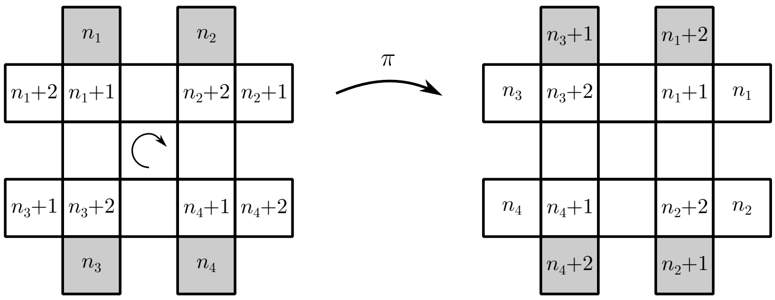
Määritelmä 6.4. Tarkastellaan nurkkapalan x ruutuja asemassa σ. Palan x *kiertymä* $k_x(\sigma) \in \mathbb{Z}_3$ on sen palaan x kuuluvan ruudun numero, joka sattuu asemassa σ olemaan jollakin merkityistä paikoista. Aseman σ *nurkkapalojen kokonaiskiertymä* on kaikkien nurkkapalojen kiertymien summa, ja sitä merkitään $K_N(\sigma) = \sum_x k_x(\sigma)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että nurkkapalojen kokonaiskiertymä ei muutu perussiirroissa. Kokonaiskiertymä on siis invariantti.

Lause 6.5. *Olkoon π perussiirto. Tällöin $K_N(\pi \circ \sigma) = K_N(\sigma)$ kaikissa asemissa $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Tutkitaan, miten eri perussiirrot vaikuttavat kokonaiskiertymään. Kaikki merkityt paikat ovat kuution ylä- ja alatahkoilla, joten siirrot U ja D siirtävät kaikki merkityllä paikalla olevat ruudut jollekin toiselle merkitylle paikalle. Nämä siirrot eivät siis vaikuta kokonaiskiertymään lainkaan.

Siirrot F, B, L ja R ovat ruutujen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tarkastella yhtä niistä. Valittu perussiirto vaikuttaa vain niiden palojen kiertymään, jotka sijaitsevat kierrettävällä sivutahkolla. Numeroidaan nämä palat luvuin 1–4 ja oletetaan, että kunkin palan alkuperäinen kiertymä on $n_i = k_i(\sigma)$. Kuvassa 27 näkyy, mitä sivutahkon paloille tapahtuu suoritettaessa perussiirto π. Merkityille paikoille osuvat ruudut on tummennettu.



Kuva 27: Perussiirron vaikutus nurkkapalojen kiertymään.

Kuvan 27 mukaan asemassa $\sigma \circ \pi$ saadaan neljän liikkuneen palan kokonaiskiertymäksi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 2) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 2) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6 \qquad (\mathbb{Z}_3\text{:ssa } 6 = 0) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa F, B, L tai R. $\square$

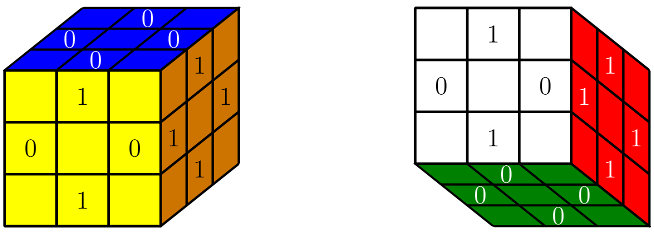
Koska alkuasemassa kokonaiskiertymä on nolla, saadaan edellisestä lauseesta heti seuraava korollaari.

Korollaari 6.6. *Kaikissa asemissa* $\sigma \in \mathbb{R}$ *pätee* $K_N(\sigma) = 0$.

Oletetaan, että nurkkapalat ovat jo oikeilla paikoillaan. Nyt ne saadaan myös oikeisiin asentoihin edellistä korollaaria soveltamalla. Eräs tapa tehdä tämä olisi valita aina kaksi väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, konjugoida ne vierekkäisiksi ja kiertää toinen niistä oikeaan asentoon. Tällä tavalla oikeassa asennossa olevien palojen määrä lisääntyy koko ajan, joten lopulta kaikki palat ovat oikeassa asennossa. Missään vaiheessa jäljellä ei voi olla vain yhtä väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, koska tällöin nurkkien kokonaiskiertymä olisi nollasta poikkeava.

Toinen tapa saada nurkat oikeisiin asentoihin ei vaadi konjugointia. Siinä järjestetään nurkkapalat aluksi jonoon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jossa sama pala voi esiintyä useammin kuin kerran, mutta kaksi peräkkäistä palaa sijaitsevat aina vierekkäin (eli samalla särmällä). Tämän jälkeen käydään läpi paloja jonon alusta lähtien. Aina kun löydetään väärin päin oleva pala x_k, missä $k < n$, käytetään opittua algoritmia paloihin x_k ja x_{k+1} niin, että pala x_k tulee oikeaan asentoon. Lopulta kaikki palat $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ovat oikeassa asennossa, ja koska kokonaiskiertymän on oltava nolla, myös x_n on oikeassa asennossa.

Reunapalojen tapauksessa menetellään aivan samalla tavalla kuin nurkkapaloilla. Tarvittava ruutujen numerointi näkyy kuvasta 28, jossa kuutio on kuvattu perusasemassa edestä ja takaa. Ruutujen numeroiden ajatellaan nyt kuuluvan ryhmään $\mathbb{Z}_2$. Nollaruutuja ovat kaikki siniset ja vihreät ruudut, ja niissä paloissa, joissa kumpiakaan ei esiinny, keltaiset tai valkoiset ruudut.



Kuva 28: Särmäpalojen numerointi.

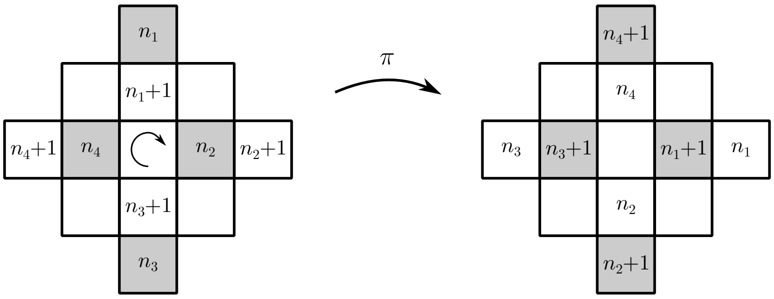
Kuten aikaisemmin, perusasemassa olevien nollaruutujen paikat merkitään, ja palan kiertymä määräytyy siitä, mikä palan ruuduista sattuu olemaan merkityllä paikalla.

Määritelmä 6.7. Särmäpalan x *kiertymä* $k_x(\sigma) \in \mathbb{Z}_2$ asemassa σ on sen palaan x kuuluvan ruudun numero, joka sattuu olemaan asemassa σ jollakin merkityistä paikoista. Aseman σ *särmäpalojen kokonaiskiertymä* on kaikkien särmäpalojen kiertymien summa, ja sitä merkitään $K_S(\sigma) = \sum_x k_x(\sigma)$.

Lause 6.8. *Särmäpalojen kokonaiskiertymä* $K_S(\sigma)$ *ei muutu perussiirroissa.*

Todistus. Käydään kaikki perussiirrot läpi. Siirrot U ja D siirtävät jokaisen merkityllä paikalla olevan ruudun jälleen merkitylle paikalle, joten ne eivät muuta kokonaiskiertymää. Toisaalta siirrot L ja R siirtävät jokaisen merkitsemättömällä paikalla olevan ruudun merkitsemättömälle paikalle, joten kokonaiskiertymä ei niissäkään muutu.

Jäljelle jää tutkia, mitä tapahtuu siirroissa F ja B. Ne ovat palojen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tutkia toista niistä. Nimetään siirtoon osallistuvat särmäpalat numeroilla 1, 2, 3 ja 4 ja oletetaan, että kunkin kiertymä alkuperäisessä asemassa $\sigma \in \mathbb{R}$ on $n_i = k_i(\sigma)$. Kuvassa 29 on näytetty, miten perussiirto vaikuttaa palojen kiertymiin. Särmäpalat on taiteltu auki ja merkityillä paikoilla sijaitsevat ruudut tummennettu.



Kuva 29: Perussiirron vaikutus särmäpalojen kiertymään.

Kuvasta 29 nähdään, että tarkasteltavien neljän palan kiertymien summaksi tulee uudessa asemassa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 1) \\
&= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \qquad (\mathbb{Z}_2\text{:ssa } 4 = 0) \\
&= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.
\end{aligned}
$$

Reunapalojen kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa F tai B. $\square$

Särmäpalat voidaan nyt saada oikeisiin asentoihin samalla periaatteella kuin nurkkapalatkin.