Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 1, ratkaisuehdotus (5 sivua)
5.11.2012

Tehtävä 1. Tarkastellaan symmetrisen ryhmän S_6 alkioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Laske permutaatiot $\sigma\tau$ ja σ^{-1} sekä ratkaise yhtälö $\sigma\xi\sigma^{-1} = \tau$ muuttujan $\xi \in S_6$ suhteen. Esitä lisäksi permutaatiot σ, τ ja ξ erillisten syklien tuloina.

Ratkaisu. Permutaatioiden σ ja τ tulo on

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutaation σ käänteisalkio on

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Yhtälö $\sigma\xi\sigma^{-1} = \tau$ voidaan ratkaista kertomalla se oikealta puolelta alkiolla σ ja vasemmalta puolelta alkiolla σ^{-1}. Tällöin saadaan yhtälö $\sigma^{-1}\sigma\xi\sigma^{-1}\sigma = \sigma\tau\sigma^{-1}$ ja edelleen $\xi = \sigma^{-1}\tau\sigma$. Nyt tiedämme, että

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saatu ξ alkuperäiseen yhtälöön nähdään, että kyseessä todella on yhtälön ratkaisu.

Kysyttyjen permutaatioiden sykliesitykset ovat

$$\sigma = (124)(365), \quad \tau = (26453) \quad \text{ja} \quad \xi = (13265).$$

Tehtävä 2. Oletetaan, että σ on jokin äärellisen joukon X permutaatio ja $x \in X$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle pätee $\sigma^n(x) = x$. (Tehtävässä luki alun perin "kokonaisluku $n > 1$", mutta tämä muutettiin.)

Todistus. Koska X on äärellinen, löytyy jotkin positiiviset kokonaisluvut k ja l, joille pätee $k < l$ ja $\sigma^k(x) = \sigma^l(x)$. Nyt

$$\sigma^{l-k}(x) = (\sigma^{-k} \circ \sigma^l)(x) = (\sigma^k)^{-1}(\sigma^l(x)) = x.$$

Toisaalta $l - k$ on positiivinen kokonaisluku, joten väite on todistettu. $\square$

Tehtävä 3. Laske tulot $\Delta(\sigma)$ ja Δ_4 määritelmän perusteella, kun

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Päättele tästä permutaation σ etumerkki. Laske sitten σ:n etumerkki sykliesityksestä lähtien. Laske vielä permutaation τ etumerkki haluamallasi tavalla, kun

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 11 & 2 & 8 & 6 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

Ratkaisu. Määritelmän mukaan $\Delta(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))$. Nyt

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma) &= (\sigma(2) - \sigma(1))(\sigma(3) - \sigma(1))(\sigma(3) - \sigma(2)) \\ &\quad \cdot (\sigma(4) - \sigma(1))(\sigma(4) - \sigma(2))(\sigma(4) - \sigma(3)) \\ &= (4-1)(2-1)(2-4)(3-1)(3-4)(3-2) = 12. \end{aligned}$$

Nähdään myös, että

$$\Delta_4 = \Delta(\mathrm{id}) = (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 12.$$

Nyt permutaation σ merkki on

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma)}{\Delta_4} = \frac{12}{12} = 1,$$

ja siten σ on parillinen permutaatio.

Lasketaan sitten σ:n etumerkki sykliesityksestä lähtien. Huomataan, että $\sigma = (243)$. Sykli, jonka pituus on kolme voidaan kirjoittaa kahden vaihdon tulona, joten σ on parillinen permutaatio. (Ks. lause 2.13.)

Permutaation τ sykliesitys on

$$\tau = (1\ 3\ 4)(2\ 7\ 8\ 6)(5\ 11)(9\ 10),$$

joten se muodostuu 3-syklistä, 4-syklistä ja kahdesta 2-syklistä. Sykliesityksestä laskettu summa $(3-1)+(4-1)+(2-1)+(2-1) = 7$ on pariton, joten korollaarin 2.14 mukaan τ on pariton permutaatio.

Tehtävä 4. Osoita, että joukon S_n parillisten permutaatioiden joukko

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$$

on ryhmän S_n aliryhmä.

Todistus. Koska $\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = \Delta_n/\Delta_n = 1$, niin $\mathrm{id} \in A_n$. Oletetaan sitten, että $\sigma, \tau \in A_n$. Koska $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$, niin $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = 1 \cdot 1 = 1$ ja $\sigma\tau \in A_n$. Huomataan myös, että

$$\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1.$$

Toisaalta tiedetään, että $\{\operatorname{sign}(\sigma), \operatorname{sign}(\sigma^{-1})\} \subset \{1, -1\}$, joten ei ole muuta mahdollisuutta kuin $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$. Nyt tiedämme, että $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = 1$ ja siksi $\sigma^{-1} \in A_n$. Siten A_n on ryhmän S_n aliryhmä. $\square$

Väite voidaan todistaa myös toisella tavalla. Kuvaus sign: $S_n \to \{1, -1\}$ on homomorfismi symmetriseltä ryhmältä S_n multiplikatiiviselle ryhmälle $\{1, -1\}$. Huomataan, että $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\} = \operatorname{Ker}(\operatorname{sign})$. Parilliset permutaatiot muodostavat siis homomorfismin sign ytimen, ja siten kyseessä on ryhmän S_n aliryhmä.

Tehtävä 5. Oletetaan, että permutaation $\sigma \in S_n$ esityksessä erillisten syklien tulona on r sykliä 1-syklit mukaanluettuina. Näytä, että $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{n+r}$.

Todistus. Jos permutaation σ syklien pituudet ovat $n_1, \ldots, n_r$, sen etumerkki on korollaarin 2.14 mukaan

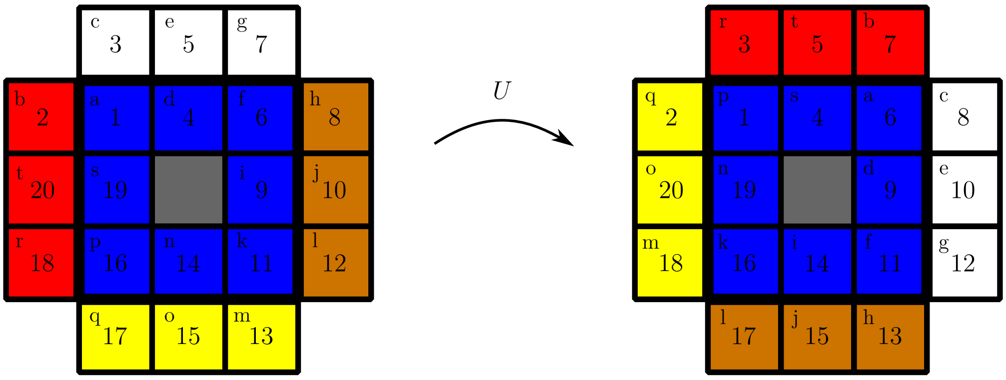
$$(n_1 - 1) + \cdots + (n_r - 1) = (n_1 + \cdots + n_r) - (1 + \cdots + 1) = n - r.$$

Toisaalta parillisuus ei riipu etumerkistä, joten $(-1)^{n-r} = (-1)^{n+r}$. $\square$

Tehtävä 6. Numeroi Rubikin kuution ruutujen paikat valitsemallasi tavalla ja esitä jokin Rubikin ryhmän perussiirto erillisten syklien tulona. Laske perussiirron etumerkki.

Ratkaisu. Symmetrian vuoksi ei ole väliä, mitä perussiirroista tarkastellaan. Valitaan siirto U, joka kiertää kuution ylätahkoa neljänneskierroksen myötäpäivään. Tämä siirto pitää kuution alatahkon ruudut paikoillaan, samoin kuin ylä- ja alatahkon välisten palojen ruudut. Voidaan siis keskittyä pelkästään ylätahkoon.

Numeroidaan ylätahkon ruutujen paikat alla olevassa kuvassa esitetyllä tavalla. Kuvassa ylätahkon palat on levitetty auki. Merkitään ruutuja pienillä kirjaimilla, jotta nähdään, mihin kukin ruutu siirtyy perussiirrossa.



Käytetään sovittua merkintätapaa, jossa $U(i) = j$ täsmälleen silloin, kun paikalla i ollut ruutu siirtyy permutaatiossa U paikalle j. Näin esimerkiksi $U(1) = 6$ ja $U(2) = 7$, sillä ruudut paikoilla 1 ja 2 olleet ruudut a ja b siirtyvät paikoille 6 ja 7. Perussiirron sykliesitykseksi saadaan

$$U = (1\ 6\ 11\ 16)(2\ 7\ 12\ 17)(3\ 8\ 13\ 18)(4\ 9\ 14\ 19)(5\ 10\ 15\ 20).$$

Tämä on viiden 4-syklin tulo eli pariton permutaatio.