**Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon**
**Harjoitus 2, ratkaisuehdotuksia**
**12.11.2012**

Tehtävä 1. Tarkastellaan ensin siirtoa $F^{-1}R$. Kuutiota näpertämällä (niinkuin tehtävänannossa kehotetaan) huomataan, että pienin $n$, jolle $(F^{-1}R)^n$ vie

a) nurkkapalojen ruudut takaisin paikoilleen, on $n = 7$,

b) särmäpalojen ruudut takaisin paikoilleen, on $n = 9$

c) kaikki ruudut takaisin paikoilleen, on $n = 63$.

Se, että $63 = \mathrm{pyj}(7, 9)$ (eli lukujen 7 ja 9 pienin yhteinen jaettava), ei ole sattumaa. Se on pienin luku, jolla on se ominaisuus, että se on sekä 7:n että 9:n moninkerta. Tekemällä siirtoa jommankumman luvun moninkerran verran tietysti vie nurkka- tai särmäpalojen ruudut takaisin paikoilleen, ja kun pyöritämme kuutiota sellaisen lukumäärän, joka on *molempien* lukujen moninkerta, menevät *kaikki* ruudut takaisin paikoilleen.

Tämä päättely pätee mielivaltaiseen siirtokombinaatioon, joten päättelemme, että kaikkien siirtojen osalta $c$)-kohdan vastaus on $a$)- ja $b$)-kohtien lukujen pienin yhteinen jaettava.

Kuutiota kääntelemällä ja yllämainittua logiikkaa soveltamalla saadaan siis seuraavat vastaukset
$FR$:

a) $n = 15$

b) $n = 7$

c) $n = 105$

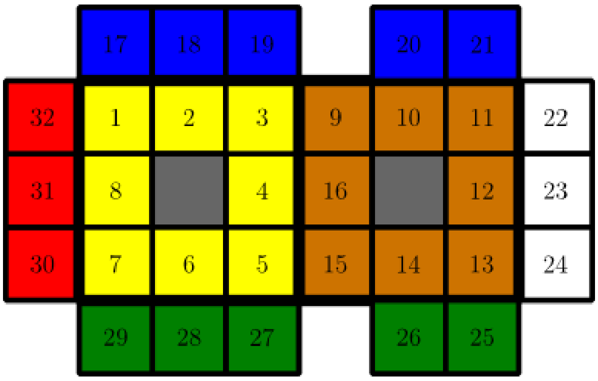
$FRF^{-1}R^{-1}$:

a) $n = 6$

b) $n = 3$

c) $n = 6$

Esitetään vielä kunkin siirron sykliesitys alla olevan kuvan mukaisessa numeroinnissa.




$$
\begin{aligned}
F^{-1}R =&(1\ 7\ 5\ 32\ 29\ 15\ 17\ 30\ 27)(3\ 21\ 24\ 9\ 11\ 13\ 19\ 22\ 25)\\
&(2\ 8\ 6\ 4\ 20\ 23\ 26)(10\ 12\ 14\ 18\ 31\ 28\ 16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
FR =&(1\ 3\ 21\ 24\ 30\ 17\ 9\ 11\ 13\ 29\ 32\ 19\ 22\ 25\ 7)(5\ 15\ 27)\\
&(2\ 4\ 20\ 23\ 26\ 6\ 8)(10\ 12\ 14\ 28\ 31\ 18\ 16)
\end{aligned}
$$

$$
FRF^{-1}R^{-1} =(3\ 11\ 9\ 22\ 19\ 21)(5\ 7\ 15\ 29\ 27\ 30)(4\ 6\ 20)(10\ 16\ 28)
$$

Tehtävä 2. Oletetaan, että $g_1H = g_2H$. Olkoon $e$ ryhmän $G$ neutraalialkio. Koska $e \in H$, niin $g_1 = g_1e \in g_1H$. Oletuksen nojalla $g_1 \in g_2H$.

Oletetaan sitten, että $g_1 \in g_2H$. Nyt on olemassa $h \in H$, jolle pätee $g_1 = g_2h$. Tällöin $g^{-1}g_2 = h^{-1} \in H$.

Oletetaan lopuksi, että $g^{-1}g_2 \in H$. Nyt $g_1^{-1}g_2 = h$ jollakin $h \in H$, joten $g_2 = g_1h \in g_1H$. Toisaalta $g_2 \in g_2H$, joten näemme, että $g_1H \cap g_2H \neq$. Koska sivuluokat ovat erillisiä (todistus luentomateriaalissa), täytyy päteä $g_1H = g_2H$.

Tehtävä 3. Asentoryhmän permutaatiot vaikuttavat kuution reuna- ja nurkkapaloihin. Koska asentoryhmän alkiot pitävät palat paikoillaan, voimme tarkastella jokaista palaa erikseen ja osoittaa kunkin palan kohdalla, että permutaatioiden kertomisjärjestyksellä ei ole merkitystä.

Tarkastellaan aluksi yhtä reunapalaa. Olkoot sen ruudut $a$ ja $b$. Asentoryhmän permutaatio pitää joko ruudut paikoillaan tai vaihtaa niiden paikat. Palaan rajoitettuna permutaatio on siis joko id tai $(ab)$. Kun näitä permutaatioita kertoo keskenään, ei kertomisjärjestyksellä ole väliä.

Siirrytään sitten kulmapaloihin. Olkoot jonkin kulmapalan ruudut $a$, $b$ ja $c$. Asentoryhmän permutaatio voi joko pitää ruudut paikoillaan tai sitten kiertää niitä myötä- tai vastapäivään. Palaan rajoitettuna permutaatio on siis joko id, $(abc)$ tai $(acb)$. Näiden permutaatioiden kertomisjärjestyksellä ei ole väliä.

Siten asentoryhmä on vaihdannainen.

Tehtävä 4. a) $(368) = F^2\sigma F^2$
b) Kirjoitetaan vaihto 3-syklien avulla: $(16)(38) = (163)(638)$. Tällöin saadaan $(163)(638) = \sigma F^2\sigma^{-1}F^2$.
c) $(18)(36) = (183)(836)$, josta $(183)(836) = (F\sigma F^{-1})(F^2\sigma F^2) = F\sigma F\sigma F^2$.

Kahden vaihdon kirjoittaminen 3-syklien tulona (toivottavasti) auttaa hahmottamaan, millaisten $F$ ja $\sigma$:n siirtokombinaatioden tulona haluttu siirto voidaan ilmaista.

Tehtävä 5. Oletetaan, että $x \in G$. Olkoon $e$ ryhmän $G$ neutraalialkio. Koska $xe = ex$, niin $e \in C_G(x)$. Jos $g, h \in C_G(x)$, niin

$$(gh)x = g(hx) = g(xh) = (gx)h = (xg)h = x(gh)$$

ja siten $gh \in C_G(x)$. Lisäksi $gx = xg$, mistä seuraa, että $xg^{-1} = g^{-1}x$, ja siten $g^{-1} \in C_G(x)$. Olemme siis osoittaneet, että $C_G(x)$ on ryhmän $G$ aliryhmä.

Osoitetaan sitten, että $\zeta G$ on $G$:n aliryhmä. Koska $xe = ex$ kaikilla $x \in G$, niin $e \in C_G(x)$. Jos $g, h \in \zeta G$, niin $ghx = gxh = xgh$ kaikilla $x \in G$ ja siten $gh \in \zeta G$. Koska $gx = xg$ kaikilla $x \in G$, niin $xg^{-1} = g^{-1}x$ kaikilla $x \in G$. Tästä seuraa, että $g^{-1} \in \zeta G$. Siten $\zeta G$ on aliryhmä. Saman asian voi osoittaa myös toteamalla, että $\zeta G = \bigcap_{x\in G} C_G(x)$. Aliryhmien leikkaus on nimittäin aina aliryhmä.

Tehtävä 6. Määritetään ensin ryhmän $A_4$ alkiot. Ryhmän $S_4$ kertaluku on $4! = 24$ ja aliryhmän $A_4$ indeksi on 2, joten ryhmän $A_4$ kertaluku on $24/2 = 12$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned} A_4 =\{&(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123),\\ &(124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että joukko $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ on ryhmän $A_4$ aliryhmä tutkimalla $V$:n kertotaulua:

| | (1) | (12)(34) | (13)(24) | (14)(23) |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (1) | (12)(34) | (13)(24) | (14)(23) |
| (12)(34) | (12)(34) | (1) | (14)(23) | (13)(24) |
| (13)(24) | (13)(24) | (14)(23) | (1) | (13)(24) |
| (14)(23) | (14)(23) | (13)(24) | (12)(34) | (1) |

Kertotaulusta nähdään, että kahden $V$:n alkion tulo on myöskin $V$:n alkio ja että jokainen alkio on oma käänteisalkionsa. Lisäksi neutraalialkio on joukon $V$ alkio, joten kyseessä on aliryhmä.

Käytetään sitten normaalisuuskriteeriä ja osoitetaan, että $V$ on normaali. Olkoon $\sigma \in A_4$ ja $\tau \in V$. On osoitettava, että ${}^{\sigma}\tau = \sigma\tau\sigma^{-1} \in V$. Tiedämme, että permutaation syklityyppi säilyy konjugoinnissa. Aliryhmän $V$ alkiot ovat täsmälleen ne $A_4$:n alkiot, jotka koostuvat kahdesta vaihdosta. Kun tällaistä alkiota konjugoidaan jollakin toisella permutaatiolla, on tuloksena kahden vaihdon tulo eli $V$:n alkio.

Koska ryhmällä $A_4$ on normaali epätriviaali aliryhmä, ei $A_4$ ole yksinkertainen.

Jos ei haluta pitää tunnettuna, että konjugointi säilyttää syklityypin, voidaan normaalius nähdä myös seuraavalla päättelyllä. Huomataan että aliryhmämme $V$ alkio $\tau$ toteuttaa ehdon $\tau^2 = 1$. Jos $\sigma \in A_4$ osoittaa suora lasku, että

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})^2 = (\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \sigma\tau^2\sigma^{-1} = 1.$$

Siis konjugoitu alkio ${}^{\sigma}\tau$ toteuttaa myös ehdon $({}^{\sigma}\tau)^2 = 1$. Ryhmässä $A_4$ tällaisia alkioita ovat ainoastaan kahden vaihdon tulot (3-sykli ei voi olla oma käänteisalkionsa). Siten ${}^{\sigma}\tau \in V$.