Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 3, ratkaisuehdotus (4 sivua)
19.11.2012

Tehtävä 1. Olkoon G ryhmä, H sen osajoukko ja $g \in G$. Todista seuraavat väitteet:

a) ${}^gH \leq G$ jos ja vain jos $H \leq G$

b) ${}^gH \trianglelefteq G$ jos ja vain jos $H \trianglelefteq G$.

Todistus. a) Oletetaan ensin, että $H \leq G$ ja osoitetaan, että ${}^gH \leq G$. Olkoon e ryhmän G neutraalialkio. Koska $e \in H$, niin $e = geg^{-1} \in {}^gH$. Jos taas $a, b \in {}^gH$, niin $a = ghg^{-1}$ ja $b = gkg^{-1}$ joillakin $h, k \in H$. Nyt

$$ab = ghg^{-1}gkg^{-1} = ghkg^{-1}.$$

Koska H on aliryhmä, niin $hk \in H$ ja siten $ab \in {}^gH$. Lisäksi

$$a^{-1} = (ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1}.$$

Koska $h^{-1} \in H$, niin $a^{-1} \in {}^gH$. Siten ${}^gH$ on ryhmän G aliryhmä.

Toisaalta jos ${}^gH \leq G$, niin ylläolevan nojalla ${}^{g^{-1}}({}^gH) = H$ on myös ryhmän G aliryhmä.

b) Oletetaan, että H on normaali aliryhmä G. Jos $g \in G$, niin tällöin $gH = Hg$ ja edelleen ${}^gH = gHg^{-1} = H$. Siten aliryhmät H ja ${}^gH$ ovat samat. Koska H on normaali, niin myös ${}^gH$ on normaali. Jos taas ${}^gH$ on normaali aliryhmä, tiedämme, että ${}^{g^{-1}}({}^gH) = {}^gH$. Koska ${}^{g^{-1}}({}^gH) = H$, niin aliryhmät H ja ${}^gH$ ovat tässäkin tapauksessa samat. Siten H on normaali aliryhmä. $\square$

Tehtävä 2. Osoita, että jos A ja B ovat konjugaattiluokkia, joille pätee $A \cap B \neq \emptyset$, niin $A = B$. Eri konjugaattiluokat ovat siis erillisiä.

Todistus. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että A on alkion a konjugaattiluokka ja B alkion b konjugaattiluokka. Jos $x \in A \cap B$, niin on olemassa sellaiset konjugoivat alkiot $g, h \in G$, että $x = gag^{-1} = hbh^{-1}$. Tästä seuraa, että

$$a = g^{-1}hbh^{-1}g = (g^{-1}h)b(g^{-1}h)^{-1}.$$

Nyt jokainen alkion a konjugaatti voidaan kirjoittaa alkion b konjugaattina, sillä

$$kak^{-1} = k(g^{-1}h)b(g^{-1}h)^{-1}k^{-1} = (kg^{-1}h)b(kg^{-1}h)^{-1} \quad \text{kaikilla } k \in G.$$

Olemme siis osoittaneet, että $A \subset B$.

Toisaalta näemme, että

$$b = h^{-1}gxg^{-1}h = (h^{-1}g)x(h^{-1}g)^{-1}.$$

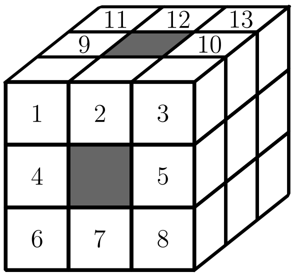
Tästä seuraa samaan tapaan kuin edellä, että $B \subset A$ ja edelleen $A = B$. Toisistaan poikkeavilla konjugaattiluokilla ei siis ole yhteisiä alkioita. $\square$

Tehtävä 3. Tarkastellaan Rubikin paikkaryhmää $\mathbb{R}_p$. Numeroidaan kuution palojen paikat oheisen kuvan mukaisesti.

a) Määritä etutahkon perussiirron F sykliesitys ja etumerkki.

b) Osoita, että mikään kahden nurkka- tai särmäpalan vaihto (ab), missä muut palat eivät liiku, ei ole mahdollinen siirto.

c) Luennoilla esitelty 3-sykli on $\sigma = (163)$. Esitä siirto $(6\ 8)(11\ 13)$ tulona permutaatiosta σ sekä sen konjugaateista, kirjoittaen konjugoivat alkiot perussiirtojen yhdistelminä.



Ratkaisu. a) Etutahkon perussiirron sykliesitys on

$$F = (1386)(2574).$$

Koska 4-syklit ovat parittomia ja F on kahden 4-syklin tulo, on F parillinen permutaatio.

b) Vaihto on pariton permutaatio. Jokainen perussiirto on kuitenkin a)-kohdan nojalla parillinen, joten perussiirtojen tulona voi syntyä vain parillinen permutaatio. Vaihto ei siis voi olla perussiirtojen tulo, joten se ei ole laillinen siirto.

c) Aloitetaan kirjoittamalla tutkittava siirto $\tau = (6\ 8)(11\ 13)$ lauseen 3.12 todistusta mukaillen 3-syklien tulona:

$$\tau = (6\ 8\ 11)(8\ 11\ 13).$$

Valitaan sitten molempia yllä olevan tulon tekijöitä varten jokin siirtosarja, joka siirtää kyseisen tekijän ilmaisemilla paikoilla olevat palat (standardi)paikoille 1, 3 ja 6:

$$\begin{aligned} (6, 8, 11) &\mapsto (1, 6, 3) &&: \ FU^{-1} \\ (8, 11, 13) &\mapsto (6, 3, 1) &&: \ U^2F \end{aligned}$$

Teorian perusteella tiedetään nyt, että σ:n konjugointi yllä olevien siirtosarjojen käänteissiirroilla tuottaa halutut 3-syklit:

$$\begin{aligned} &{}^{(UF^{-1})}(1\ 6\ 3) = (6\ 8\ 11), \\ &{}^{(F^{-1}U^2)}(1\ 6\ 3) = (13\ 8\ 11) = (8\ 11\ 13). \end{aligned}$$

Saadaan siis esitys

$$\tau = {}^{(UF^{-1})}\sigma\ {}^{(F^{-1}U^2)}\sigma.$$

Moni muukin ratkaisu olisi tietysti mahdollinen.

Tehtävä 4. Määritä ryhmän A_4 konjugaattiluokat.
Ratkaisu. Tiedämme, että

$$\begin{aligned} A_4 = \{&\mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (123),\\ &(124),\ (132),\ (134),\ (142),\ (143),\ (234),\ (243)\}. \end{aligned}$$

Permutaatioita konjugoitaessa voidaan käyttää apuna lausetta 4.6. Huomataan, että

$$\begin{aligned} &{}^{(123)}((12)(34)) = (14)(23) \\ \text{ja}\quad &{}^{(132)}((12)(34)) = (13)(24). \end{aligned}$$

Siten alkion $(12)(34)$ konjugaattiluokassa ovat ainakin alkiot $(14)(23)$ ja $(13)(24)$. Toisaalta tiedämme lauseen 4.6 perusteella, että konjugoinnissa permutaation syklityyppi säilyy. Koska kaikki muut ryhmän A_4 alkiot ovat syklityypiltään erilaisia, ei tässä konjugaattiluokassa ole enempää alkioita.

Samalla tavoin nähdään, että

$$\begin{aligned} {}^{(124)}(123) &= (243), \\ {}^{(142)}(123) &= (134), \\ {}^{(243)}(123) &= (142), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} {}^{(124)}(132) &= (234), \\ {}^{(142)}(132) &= (143), \\ {}^{(243)}(132) &= (124). \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että alkiot (123) ja (132) eivät ole konjugaatteja. Jos pätisi ${}^{\sigma}(123) = (132)$ jollakin $\sigma \in A_4$, niin lauseen 4.6 perusteella $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (132)$. Permutaatio (132) voidaan kirjoittaa myös muodoissa (321) ja (213), ja siten permutaatiolle σ pätee jokin seuraavista:

i) $\sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 2$
ii) $\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1$
iii) $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(3) = 3.$

Konjugoivan alkion täytyisi siis olla jokin vaihdoista (23), (13) tai (12). Koska ryhmä A_4 ei sisällä vaihtoja, eivät alkiot (123) ja (132) kuulu samaan konjugaattiluokkaan.

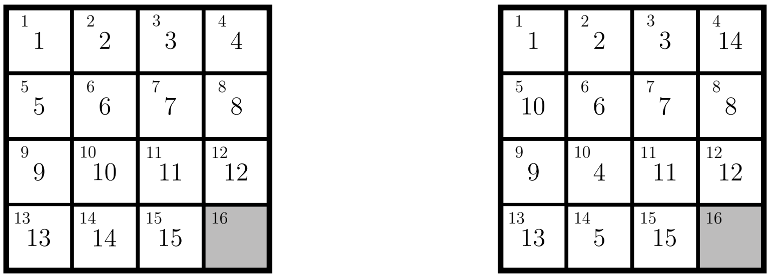
Siten konjugaattiluokiksi saadaan

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{id}\}, \\ &\{(12)(34),\ (14)(23),\ (13)(24)\}, \\ &\{(123),\ (243),\ (134),\ (142)\} \quad \text{ja} \\ &\{(132),\ (234),\ (143),\ (124)\}. \end{aligned}$$

Tehtävä 5. Tarkastellaan *viidentoista peliä.* Siinä on 4×4-kehikkoon asetettu viisitoista numeroitua neliötä (ks. kuva seuraavalla sivulla). Neliöt voivat liikkua toistensa suhteen niin, että tyhjän paikan vierellä oleva neliö voidaan aina siirtää tyhjään paikkaan (perussiirto). Tavoitteena on saada neliöt palautettua vasemmanpuoleisen kuvan mukaiseen perusasemaan.

Kuvataan pelin siirtoja permutaatioilla kuutiosta tuttuun tapaan, eli numeroidaan paikat luvuin 1–16, ja jos paikassa 1 ollut neliö siirtyy paikkaan 3, ajatellaan permutaation kuvaavan $1 \mapsto 3$ jne. Kuvassa paikkojen numerot ovat ruutujen vasemmissa yläkulmissa.

Osoita, että oikeanpuoleisen kuvan mukaisesta asemasta lähtien peliä on mahdoton ratkaista. (Vihje: tutki ratkaisemiseen tarvittavan siirron etumerkkiä.)



Ratkaisu. Kuvan mukaisesta asemasta pelin ratkaisemiseksi olisi suoritettava siirtosarja, joka vastaa sykliä $(4\ 14\ 5\ 10)$. Kyseessä on siis pariton permutaatio. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kaikki siirtosarjat, jotka pitävät tyhjän ruudun paikallaan (eli kuvan tilanteessa vievät tyhjän ruudun siirron lopuksi takaisin oikeaan alakulmaan) ovat parillisia permutaatioita.

Seuraavassa kuvassa on pelin neliöiden paikat värjätty vuorotellen tummiksi ja vaaleiksi shakkilaudan tapaan. Lähtiessään oikeasta alakulmasta tyhjä ruutu siirtyy jokaisessa perussiirrossa joko tummalta vaalealle paikalle tai vaalealta tummalle. Jotta se pääsisi takaisin aloituspaikalleen, joka on tumma, on siis suoritettava parillinen määrä perussiirtoja. Pariton määrä nimittäin jättäisi tyhjän ruudun vaalealle paikalle. Jokainen perussiirto on vaihto, joten tarvittava permutaatio on parillinen. Täten haluttua 4-sykliä ei voida muodostaa.