Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 4, ratkaisuehdotus (5 sivua)
26.11.2012

Tehtävä 1. Etsi neliön symmetriaryhmän D_8 kaikki aliryhmät. Mitkä niistä ovat normaaleja?

Ratkaisu. Ryhmää D_8 käsiteltiin luentomateriaalin esimerkissä 4.9. Esimerkissä todettiin, että ryhmä on alkioiden $\rho = (1234)$ ja $\pi = (12)(34)$ virittämä. Lisäksi jokainen ryhmän alkio on muotoa $\pi^m \rho^n$ joillakin $m \in \{0, 1\}$ ja $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Toisin sanoen

$$D_8 = \{\mathrm{id},\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \pi,\ \pi\rho,\ \pi\rho^2,\ \pi\rho^3\}.$$

Tässä $\rho^2 = (13)(24)$, $\rho^3 = (1432)$, $\pi\rho = (24)$, $\pi\rho^2 = (14)(23)$ ja $\pi\rho^3 = (13)$.

Lagrangen lauseen nojalla jokaisen aliryhmän kertaluku jakaa ryhmän kertaluvun, joka on kahdeksan. Aliryhmissä on siis joko 1, 2, 4 tai 8 alkiota. Kertalukua 1 oleva aliryhmä on tietenkin $\{\mathrm{id}\}$ ja kertalukua 8 oleva aliryhmä D_8.

Jos aliryhmä sisältää alkion ρ, se sisältää myös alkiot ρ^2, ρ^3 ja $\rho^4 = \mathrm{id}$. Jos aliryhmässä on muitakin alkioita, niin sen kertaluku on suurempi kuin neljä ja kyseessä on silloin ryhmä D_8 itse. Siten ainoat epätriviaalit aliryhmät, jotka sisältävät alkion ρ, ovat syklinen ryhmä $\{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ ja sen kaksialkioinen aliryhmä $\{\mathrm{id}, \rho^2\}$.

Jos aliryhmä sisältää alkion ρ^3, niin se sisältää myös alkion $\rho = (\rho^3)^3$. Siten päädymme täsmälleen samoihin aliryhmiin kuin yllä.

Tarkasteltavina ovat siis enää alkiot ρ^2, π, $\pi\rho$, $\pi\rho^2$ ja $\pi\rho^3$. Nämä kaikki ovat alkioita, joiden kertaluku on kaksi, joten kukin niistä virittää kahden alkion syklisen ryhmän.

Tutkitaan sitten, millaisia ryhmiä edellä mainituista alkioista valitut parit virittävät. Tapauksia on yhteensä kymmenen. Ensinnäkin huomataan, että

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \pi\rho &= \rho, \\
\pi \cdot \pi\rho^3 &= \rho^3, \\
\pi\rho^2 \cdot \pi\rho &= \rho^3 \quad \text{ja} \\
\pi\rho^2 \cdot \pi\rho^3 &= \rho.
\end{aligned}$$

Ryhmät $\langle \pi, \pi\rho \rangle$, $\langle \pi, \pi\rho^3 \rangle$, $\langle \pi\rho^2, \pi\rho \rangle$ ja $\langle \pi\rho^2, \pi\rho \rangle$ sisältävät siis kaikki joko alkion ρ tai ρ^3, joten edellä osoitetun nojalla kaikki nämä aliryhmät ovat itse asiassa koko ryhmä D_8.

Alkioiden ρ^2 ja π virittämä aliryhmä on $\{\mathrm{id}, \rho^2, \pi, \pi\rho^2\}$. Sama aliryhmä ovat myös myös $\langle \rho^2, \pi\rho^2 \rangle$ sekä $\langle \pi, \pi\rho^2 \rangle$.

Alkioiden ρ^2 ja $\pi\rho$ virittämä aliryhmä puolestaan on $\{\mathrm{id}, \rho^2, \pi\rho, \pi\rho^3\}$. Saman aliryhmän antavat myös pari ρ^2 ja $\pi\rho^3$ sekä pari $\pi\rho$ ja $\pi\rho^3$.

Tutkitaan sitten, mitkä aliryhmistä ovat normaaleja. Sellaiset aliryhmät, joiden indeksi on kaksi, ovat normaaleja. Tässä tapauksessa siis kaikki neljän alkion aliryhmät ovat normaaleja.

Muiden aliryhmien tutkimisessa auttavat esimerkissä 4.9 selvitetyt konjugaattiluokat. Normaalisuuskiteerin nojalla on aliryhmä on normaali täsmälleen silloin, jos se sisältää kaikkien alkioidensa konjugaatit. Luonnollisesti neutraalialkion ainoa konjugaatti on neutraalialkio itse. Myös alkio ρ^2 on konjugaattiluokkansa ainoa alkio, mikä tarkoittaa sitä, että sekään ei muutu missään konjugoinnissa. Aliryhmä $\{\mathrm{id}, \rho^2\}$ on siis normaali. Loput kahden alkion aliryhmät eivät puolestaan ole normaaleja, sillä näemme, että ne eivät sisällä kaikkien alkoidensa kaikkia konjugaatteja.

Siten olemmme osoittaneet, että ryhmän D_8 alirymät ovat

$$
\begin{aligned}
&\{\mathrm{id}\} \quad (\text{normaali}), && \{\mathrm{id}, \pi\rho^3\}, \\
&\{\mathrm{id}, \rho^2\} \quad (\text{normaali}), && \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\} \quad (\text{normaali}), \\
&\{\mathrm{id}, \pi\}, && \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi, \pi\rho^2\} \quad (\text{normaali}), \\
&\{\mathrm{id}, \pi\rho\}, && \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi\rho, \pi\rho^3\} \quad (\text{normaali}), \\
&\{\mathrm{id}, \pi\rho^2\}, && D_8.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 2. Tarkastellaan edelleen neliön symmetriaryhmää. Etsi jokaisen alkion $x \in D_8$ keskittäjä ja laske indeksi $[D_8 : C_G(x)]$. Vertaa kutakin indeksiä alkion x konjugaattiluokan kokoon. Mitkä alkioista kuuluvat ryhmän keskukseen?

Ratkaisu. Tiedämme, että kunkin alkion keskittäjä on ryhmän D_8 aliryhmä. Aliryhmät on listattu edellisessä tehtävässä, joten keskittäjät löytyvät tuosta listasta.

Luonnollisesti alkion (1) keskittäjä on ryhmä D_8. Esimerkin 4.9 nojalla tiedämme, että alkio $\rho^2 = (13)(24)$ on konjugaattiluokkansa ainoa alkio. Siten se ei muutu missään konjugoinnissa ja siis kommutoi kaikkien alkioiden kanssa. Täten alkion ρ^2 keskittäjä on koko ryhmä D_8.

Muiden alkioiden konjugaattiluokat eivät ole yksiöitä, joten kaikki alkiot eivät keskitä niitä, vaan niiden keskittäjät ovat aitoja aliryhmiä. Koska alkio ρ^2 kommutoi kaikkien alkioiden kanssa, se on jokaisen keskittäjän alkio. Siten loppujen alkioiden keskittäjät ovat epätriviaaleja aliryhmiä, joihin kuuluu alkio ρ^2. Koska jokainen alkio kuuluu omaan keskittäjäänsä, voidaan kunkin alkion keskittäjä nyt helposti poimia aliryhmien joukosta.

Näin saamme

$$
\begin{aligned}
C_{D_8}(\mathrm{id}) &= D_8, & C_{D_8}(\pi) &= \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi, \pi\rho^2\}, \\
C_{D_8}(\rho^2) &= D_8, & C_{D_8}(\pi\rho) &= \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi\rho, \pi\rho^3\}, \\
C_{D_8}(\rho) &= \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}, & C_{D_8}(\pi\rho^2) &= \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi, \pi\rho^2\}, \\
C_{D_8}(\rho^3) &= \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}, & C_{D_8}(\pi\rho^3) &= \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi\rho, \pi\rho^3\}.
\end{aligned}
$$

Seuraavassa taulukossa on verrattu alkioiden konjugaattiluokkien kokoja niiden keskittäjien kertalukuihin. Tulokset ovat lauseen 4.12 mukaisia eli konjugaattiluokan koko on sama kuin keskittäjän indeksi.

Yllä löydettiin myös ryhmän keskus. Se koostuu niistä alkioista, jotka keskittävät kaikki alkiot, tai toisaalta ovat yksin omassa konjugaattiluokassaan. Ainoat tällaiset alkiot ovat id ja ρ^2. Siten $\zeta D_8 = \{\mathrm{id}, \rho^2\}$. Huomaa, että indeksi $[D_8 : C_{D_8}(x)]$ on 1, jos ja vain jos $x \in \zeta D_8$.

x	$\lvert {}^{D_8}x \rvert$	$\lvert C_{D_8}(x) \rvert$	$[D_8 : C_{D_8}(x)]$
id	1	8	1
ρ	2	4	2
ρ^2	1	8	1
ρ^3	2	4	2
π	2	4	2
$\pi\rho$	2	4	2
$\pi\rho^2$	2	4	2
$\pi\rho^3$	2	4	2

Tehtävä 3. Olkoon G ryhmä. Merkitään $Z = \zeta G$. Oletetaan, että tekijäryhmä G/Z on syklinen. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen ja G/Z on itse asiassa triviaali.

Todistus. Tekijäryhmän G/Z alkiot ovat muotoa gZ, missä $g \in G$. Koska tekijäryhmä on syklinen, saadaan kaikki alkiot ryhmän virittäjän potensseina. Oletetaan, että alkio xZ virittää tekijäryhmän. Nyt jokainen sivuluokka on muotoa $(xZ)^n = x^n Z$ jollakin kokonaisluvulla n.

Tehtävänä on osoittaa, että G on vaihdannainen. Olkoot $a, b \in G$. Koska sivuluokat muodostavat ryhmän G osituksen, alkiot a ja b kuuluvat joihinkin sivuluokkiin. On siis olemassa sellaiset $n, m \in \mathbb{Z}$, että $a \in x^n Z$ ja $b \in x^m Z$. Nyt $a = x^n z_1$ ja $b = x^m z_2$ joillakin $z_1, z_2 \in Z = \zeta G$. Keskuksen alkiot kommutoivat kaikkien alkioiden kanssa, joten saadaan

$$ab = x^n z_1 \cdot x^m z_2 = x^n x^m z_1 z_2 = x^{n+m} z_1 z_2$$

ja

$$ba = x^m z_2 \cdot x^n z_1 = x^m x^n z_2 z_1 = x^{m+n} z_2 z_1 = x^{n+m} z_1 z_2.$$

Siispä $ab = ba$, mistä seuraa, että G on vaihdannainen.

Koska G on vaihdannainen, täytyy olla $G = \zeta G$. Tekijäryhmä $G/\zeta G$ on siis triviaali. □

Tehtävä 4. Olkoon p jokin alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_{p^2}$ eli kertalukua p^2 oleva syklinen ryhmä ei ole minkään kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora tulo.

Todistus. Syklisellä ryhmällä aliryhmät määräytyvät ryhmän kertaluvun tekijöiden mukaan. Jokaista tekijää vastaa täsmälleen yksi aliryhmä. Syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_{p^2}$ kertaluku on p^2. Koska p on oletuksen mukaan alkuluku, ovat sen ainoat jakajat 1, p ja p^2. Tekijöitä 1 ja p^2 vastaavat triviaalit aliryhmät $\{[0]\}$ ja $\mathbb{Z}_{p^2}$. Ainoa epätriviaali aliryhmä on siis kokoa p, ja niitä on vain yksi kappale. Aliryhmän tulo itsensä kanssa ei voi kuitenkaan olla suora, joten $\mathbb{Z}_{p^2}$ ei ole kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora tulo. □

Tehtävä 5. Oletetaan, että σ on joukon X permutaatio. Permutaation σ kantaja määritellään seuraavasti:

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Kantajaan kuuluvat siis ne alkiot, jotka liikkuvat permutaatiossa paikaltaan. (Toisin sanoen kantaja on kiintopistejoukon komplementti.)

Olkoot σ ja τ joukon X permutaatioita ja x joukon X alkio. Osoita, että

a) $\sigma(x) \in \operatorname{supp}(\sigma)$, jos ja vain jos $x \in \operatorname{supp}(\sigma)$

b) $\operatorname{supp}(\sigma) = \operatorname{supp}(\sigma^{-1})$

c) $\operatorname{supp}(\sigma \circ \tau) \subset \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$.

Todistus. Jokainen kohta on helpointa käsitellä kontraposition kautta (tai tutkimalla kantajan sijasta kiintopistejoukkoa.)

a) Oletetaan ensin, että $x \notin \operatorname{supp}(\sigma)$. Tällöin $\sigma(x) = x$, joten $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Näin ollen $\sigma(x) \notin \operatorname{supp}(\sigma)$.

Oletetaan sitten, että $\sigma(x) \notin \operatorname{supp}(\sigma)$, eli $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Koska σ on injektio, täytyy päteä $\sigma(x) = x$, joten $x \notin \operatorname{supp}(\sigma)$.

b) Helposti nähdään, että

$$x \notin \operatorname{supp}(\sigma) \iff \sigma(x) = x \iff x = \sigma^{-1}(x) \iff x \notin \operatorname{supp}(\sigma^{-1}).$$

Täten $X \setminus \operatorname{supp}(\sigma) = X \setminus \operatorname{supp}(\sigma^{-1})$ ja siirtymällä komplementteihin nähdään, että $\operatorname{supp}(\sigma) = \operatorname{supp}(\sigma^{-1})$.

c) Oletetaan, että $x \notin \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$. Tämä tarkoittaa, että $x \notin \operatorname{supp}(\sigma)$ ja $x \notin \operatorname{supp}(\tau)$. Siispä $\sigma(x) = x$ ja $\tau(x) = x$, joten erityisesti $\sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = x$. Tällöin $x \notin \operatorname{supp}(\sigma \circ \tau)$. On siis päätelty, että jos $x \in \operatorname{supp}(\sigma \circ \tau)$, niin $x \in \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$. $\square$

Tehtävä 6. Osoita, että Rubikin ryhmän keskus sisältyy asentoryhmään $\mathbb{R}_a$.

Todistus. Olkoon τ siirto, joka liikuttaa paloja ja ei siten kuulu asentoryhmään $\mathbb{R}_a$. Oletetaan, että τ siirtää kuution palan paikasta x paikkaan y ja $x \neq y$.

Olkoon σ sellainen perussiirto, että se liikuttaa paikassa x olevaa palaa, mutta ei koske paikassa y olevaan palaan. Tällainen perussiirto on aina mahdollista löytää seuraavasti. Paikat x ja y ovat joko molemmat nurkkapaikkoja tai molemmat särmäpaikkoja. Jos x on särmäpaikka, se sijaitsee yhtä aikaa kahdella tahkolla ja y voi sijaita näistä vain toisella. Tällöin voidaan valita sellainen σ, joka kiertää sitä tahkoa, jolla y ei sijaitse. Toisaalta jos x on nurkkapaikka, se sijaitsee yhtä aikaa kolmella tahkolla ja y voi sijaita näistä vain yhdellä.

Tutkitaan konjugaattia $\sigma\tau\sigma^{-1}$ ja katsotaan, mitä se tekee paikassa x olevalle palalle A. Oheisessa kuvassa on esimerkki tilanteesta. Siirto σ^{-1} siirtää palan A pois paikasta x ja tilalle jonkin palan B. Tämän jälkeen siirto τ saattaa liikuttaa palaa A, mutta ainakaan se ei vie sitä paikkaan y. Sinne menee nimittäin tällä hetkellä paikassa x oleva pala B.

Lopulta siirto σ saattaa vielä liikuttaa palaa A, mutta se ei voi viedä sitä paikkaan y, sillä siirron σ oletettiin olevan sellainen, että se ei vaikuta paikkaan y.

Nyt tiedämme, että pala A ei liiku konjugaatissa $\sigma\tau\sigma^{-1}$ paikkaan y. Siirto τ kuitenkin siirtää palan A paikkaan y, mistä seuraa, että $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$. On siis päätelty, että $\tau \notin \zeta G$. Täten koko Rubikin ryhmän keskus sisältyy asentoryhmään $\mathbb{R}_a$. $\square$