Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 5, ratkaisuehdotus (4 sivua)
3.12.2012

Tehtävä 1. Osoita, että neliön symmetriaryhmä D_8 ei ole minkään epätriviaalien aliryhmiensä (sisäinen) suora tulo.

Todistus. Epätriviaalit aliryhmät lueteltiin harjoituksen 4 tehtävässä 1. Ne ovat

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{id}, \rho^2\} \quad (\text{normaali}), && \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\} \quad (\text{normaali}),\\
&\{\mathrm{id}, \pi\}, && \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi, \pi\rho^2\} \quad (\text{normaali}),\\
&\{\mathrm{id}, \pi\rho\}, && \{\mathrm{id}, \rho^2, \pi\rho, \pi\rho^3\} \quad (\text{normaali}).\\
&\{\mathrm{id}, \pi\rho^2\}, &&\\
&\{\mathrm{id}, \pi\rho^3\}, &&
\end{aligned}$$

Jos D_8 olisi kahden aliryhmänsä suora tulo, aliryhmät olisivat lemman 5.5 perusteella normaaleja. Toisen niistä täytyisi sisältää 2 alkiota ja toisen 4, jotta tulon kertaluku olisi 8. Kahden alkion aliryhmistä ainoa normaali on $Z = \{\mathrm{id}, \rho^2\}$. Toisaalta jokainen neljän alkion aliryhmä sisältää alkion ρ^2, joten aliryhmän Z leikkaus minkään neljän alkion aliryhmän kanssa ei ole triviaali. Täten ne eivät muodosta suoraa tuloa. □

Tehtävä 2. Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka konjugaattiluokat ovat $K_1, \ldots, K_m$. Olkoon x_i konjugaattiluokan K_i edustaja jokaisella $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tarkastellaan vastaavien keskittäjien indeksejä $[G : C_G(x_i)]$.

Osoita, että niiden alkioiden x_i lukumäärä, joilla pätee $[G : C_G(x_i)] = 1$, jakaa ryhmän G kertaluvun.

Todistus. Lauseen 4.12 mukaan indeksi $[G : C_G(x_i)]$ on konjugaattiluokan K_i koko. Jos indeksi on yksi, konjugaattiluokka on yksiö. Tällöin ${}^g x_i = x_i$ kaikilla $g \in G$, eli alkio x_i kuuluu keskukseen. Sama pätee myös kääntäen. Siispä niiden alkioiden x_i lukumäärä, joilla pätee $[G : C_G(x_i)] = 1$, on ryhmän keskuksen koko. Keskus on aliryhmä, joten sen kertaluku jakaa ryhmän G kertaluvun. □

Tehtävä 3. Määritä ryhmän A_4 kaikki aliryhmät.

Ratkaisu. Ryhmä A_4 koostuu neutraalialkion lisäksi 3-sykleistä ja vaihtojen tuloista. Tarkemmin sanoen,

$$\begin{aligned}
A_4 = \{&\mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\\
&(123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243)\}.
\end{aligned}$$

Ryhmän A_4 kertaluku on 12. Lagrangen lauseen mukaan aliryhmien kertaluku jakaa koko ryhmän kertaluvun. Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6 ja 12. Ainoat kertalukua 1 ja 12 olevat aliryhmät ovat triviaalit aliryhmät $\{\mathrm{id}\}$ ja A_4. Tarkastellaan muita kertalukuja erikseen.

Kertalukua 2 olevat aliryhmät ovat muotoa $\{\mathrm{id}, \sigma\}$. Koska aliryhmässä on vain yksi neutraalialkiosta poikkeava alkio σ, täytyy päteä $\sigma^2 = \mathrm{id}$, eli σ:n kertaluku on 2. Tällainen permutaatio on vaihtojen tulo, ja näitä ryhmässä A_4 on kolme: $(12)(34)$, $(13)(24)$ ja $(14)(23)$. Kukin kelpaa σ:ksi, joten näistä saadaan kolme aliryhmää.

Kertalukua 3 olevat aliryhmät sisältävät neutraalialkion lisäksi kaksi muuta alkiota. Kolmen alkion ryhmiä on kuitenkin vain yksi, nimittäin syklinen ryhmä. Tiedämme siis, että aliryhmä on muotoa $\{\mathrm{id}, \rho, \rho^{-1}\}$, missä alkion ρ kertaluku on 3. Tällaisia alkioita ryhmässä A_4 ovat kaikki 3-syklit, joita on yhteensä 8. Kukin voidaan valita alkion ρ paikalle, ja tällöin alkioksi ρ^{-1} tulee toinen 3-sykli. Toisistaan poikkeavia aliryhmiä saadaan tällä tavoin vain 4, koska sykli ja sen käänteissykli menevät aina samaan aliryhmään.

Tarkastellaan sitten kertalukua 4. Jokaisen ryhmän alkion kertaluku jakaa koko ryhmän kertaluvun (Lagrangen lauseen seuraus), joten tässä aliryhmässä voi olla vain alkioita, joiden kertaluku on 1, 2 tai 4. Ryhmässä A_4 ei ole 4-syklejä eikä vaihtoja, joten aliryhmässä voi olla neutraalialkion lisäksi vain vaihtojen tuloja. Näitä ryhmässä A_4 on täsmälleen kolme, ja jos ne laitetaan kaikki samaan joukkoon, saadaan aliryhmä $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Tekijää 6 vastaavaa aliryhmää ei ole. Tämä voidaan nähdä tarkastelemalla kahta vaihtoehtoa: joko aliryhmässä olisi vain yksi 3-sykli ja sen käänteisalkio, tai sitten aliryhmässä olisi enemmän kuin kaksi 3-sykliä.

Jos aliryhmässä on vain yksi 3-sykli (abc) ja sen käänteisalkio (acb), siellä täytyy olla myös kaikki vaihtojen tulot, jotta saataisiin yhteensä kuusi alkiota. Siis muun muassa vaihtojen tulo $(ad)(bc)$ on aliryhmässä. Tällöin aliryhmässä on kuitenkin myös konjugaatti

$$^{(ab)(cd)}(abc) = (bad).$$

Tämä olisi ylimääräinen 3-sykli, joten tilanne ei ole mahdollinen.

Jos aliryhmässä on enemmän kuin kaksi 3-sykliä, siellä on esimerkiksi 3-syklit (abc), (acb), (bcd) ja (bdc). (Syklin lisäksi on aina oltava myös käänteissykli.) Tällöin aliryhmään tulee myös alkio

$$(abc)(bcd) = (ab)(cd).$$

Nyt aliryhmässä on jo kuusi alkiota. Kuitenkin, samoin kuin edellisessä tapauksessa, siellä pitäisi olla myös konjugaatin

$$^{(ab)(cd)}(abc) = (bad).$$

Tämä on uusi 3-sykli, joten aliryhmässä olisi myös tässä tapauksessa enemmän kuin kuusi alkiota.

On siis selvitetty, että ryhmän A_4 aliryhmät ovat

$$\begin{array}{ll}
A_4, & \{\mathrm{id}, (123), (132)\}, \\
\{\mathrm{id}\}, & \{\mathrm{id}, (124), (142)\}, \\
\{\mathrm{id}, (12)(34)\}, & \{\mathrm{id}, (134), (143)\}, \\
\{\mathrm{id}, (13)(24)\}, & \{\mathrm{id}, (234), (243)\}, \\
\{\mathrm{id}, (14)(23)\}, & \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.
\end{array}$$

Tehtävä 4. Mitkä ryhmän A_4 aliryhmistä ovat normaaleja?

Aliryhmä on normaali, jos ja vain jos se sisältää kaikkien alkioidensa konjugaatit. Tämä tarkoittaa sitä, että normaalin aliryhmän on sisällettävä vain kokonaisia konjugaattiluokkia. Toisin sanoen normaalin aliryhmän on oltava yhdiste yhdestä tai useammasta luokasta.

Kolmannen harjoituksen tehtävässä 4 määritettiin ryhmän A_4 konjugaattiluokat. Ne ovat

$$
\begin{aligned}
&\{\mathrm{id}\},\\
&\{(12)(34),\ (14)(23),\ (13)(24)\},\\
&\{(123),\ (243),\ (134),\ (142)\} \quad \text{ja}\\
&\{(132),\ (234),\ (143),\ (124)\}.
\end{aligned}
$$

Vertaamalla tätä listaa edellisessä tehtävässä määritettyyn aliryhmälistaan nähdään, että ainoat aliryhmät, jotka sisältävät vain kokonaisia konjugaattiluokkia, ovat

$$\{\mathrm{id}\}, \quad A_4 \quad \text{ja} \quad \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Nämä ovat siis ainoat normaalit aliryhmät.

Tehtävä 5. Määritä ryhmän A_4 alkioiden keskittäjät ja ryhmän keskus.

Ratkaisu. Määritetään alkioiden keskittäjät tehtävän 3 sekä lauseen 4.12 avulla. Kyseisen lauseen mukaan alkion keskittäjän indeksi on sen konjugaattiluokan koko. Harjoituksen 3 tehtävän 4 perusteella alkion konjugaattiluokan koko riippuu vain alkion syklityypistä (konjugaattiluokat on myös listattu edellisen tehtävän ratkaisussa). Näin saadaan seuraava taulukko:

x	$\lvert {}^{A_4}x \rvert$	$[A_4 : C_{A_4}(x)]$	$\lvert C_{A_4}(x) \rvert$
id	1	1	12
$(ab)(cd)$	3	3	4
(abc)	4	4	3

Keskittäjät ovat aliryhmiä, ja aliryhmät listattiin tehtävässä 3. Neljän alkion aliryhmiä on vain yksi, joten sen on oltava kaikkien muotoa $(ab)(cd)$ olevien alkioiden keskittäjä. Kolmen alkion aliryhmistä oikea keskittäjä voidaan valita sillä perusteella, että alkion täytyy aina itse kuulua omaan keskittäjäänsä. Keskittäjät muodostavat siis seuraavanlaisen listan:

$$
\begin{aligned}
C_{A_4}(\mathrm{id}) &= A_4, & C_{A_4}((124)) &= \{\mathrm{id}, (124), (142)\},\\
C_{A_4}((12)(34)) &= \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, & C_{A_4}((142)) &= \{\mathrm{id}, (124), (142)\},\\
C_{A_4}((13)(24)) &= \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, & C_{A_4}((134)) &= \{\mathrm{id}, (134), (143)\},\\
C_{A_4}((14)(23)) &= \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, & C_{A_4}((143)) &= \{\mathrm{id}, (134), (143)\},\\
C_{A_4}((123)) &= \{\mathrm{id}, (123), (132)\}, & C_{A_4}((234)) &= \{\mathrm{id}, (234), (243)\},\\
C_{A_4}((132)) &= \{\mathrm{id}, (123), (132)\}, & C_{A_4}((243)) &= \{\mathrm{id}, (234), (243)\}.
\end{aligned}
$$

Lisätehtävä 6. Ryhmän S_4 aliryhmä

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

on normaali. Tutki tekijäryhmää S_4/V. Mikä on sen kertaluku? Määritä tekijäryhmän S_4/V alkioiden kertaluvut ja osoita, että tekijäryhmä ei ole syklinen.

Ratkaisu. Tekijäryhmän kertaluku on aliryhmän indeksi eli $[S_4 : V] = 24/4 = 6$. Lasketaan aliryhmän V sivuluokat:

$$\begin{aligned}
V &= \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\\
(12)V &= \{(12), (34), (1324), (1423)\},\\
(13)V &= \{(13), (1234), (24), (1432)\},\\
(23)V &= \{(23), (1342), (1243), (14)\},\\
(123)V &= \{(123), (134), (243), (142)\},\\
(132)V &= \{(132), (234), (124), (143)\}.
\end{aligned}$$

Alkioiden kertalukujen määrittämiseksi tehdään seuraava havainto: jokaiselle sivuluokalle σV pätee $(\sigma V)^n = \sigma^n V$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Sivuluokan kertaluku on siis jokin sellainen positiivinen kokonaisluku n, että sivuluokan edustajalle σ pätee $\sigma^n = 1$. Useissa sivuluokissa esiintyy kuitenkin kahdenlaista kertalukua olevia alkioita. Näistä on valittava se, jonka kertaluku on pienempi, koska alkion kertaluku on pienin positiivinen eksponentti, jolla alkion potenssista tulee neutraalialkio. Tällä tavoin saadaan seuraavat kertaluvut:

$$\begin{aligned}
o(V) &= 1, & o((12)V) &= 2,\\
o((123)V) &= 3, & o((13)V) &= 2,\\
o((132)V) &= 3, & o((23)V) &= 2.
\end{aligned}$$

Huomaa, että kertaluku ei riipu sivuluokan edustajan valinnasta. Esimerkiksi sivuluokan $(12)V$ kertaluku on 2. Toisaalta $(12)V = (1324)V$, mutta laskemalla nähdään, että

$$(1324)^2 = (12)(34) \in V,$$

joten $((1324)V)^2 = V$. Sivuluokan $(12)V$ kertaluku on siis 2 riippumatta siitä, minkä edustajan avulla se on kirjoitettu.

Jotta tekijäryhmä S_4/V olisi syklinen, jonkin alkion täytyisi virittää koko ryhmä, eli jonkin alkion kertaluvun olisi oltava 6. Näin ei kuitenkaan ole, joten tekijäryhmä ei ole syklinen. Sen sijaan se on isomorfinen ryhmän S_3 kanssa, kuten yllä valituista edustajista helposti nähdään.