Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Harjoitus 6, ratkaisuehdotus (5 sivua)
10.12.2012

Tehtävä 1. Osoita, että tuloryhmän $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$ indeksi Rubikin paikkaryhmässä $\mathbb{R}_p$ on täsmälleen kaksi. (Tarkkaan ottaen kyse on oikeastaan tuloryhmän isomorfisesta kuvasta, vrt. lauseeseen 5.18.)

Todistus. Lauseen 5.18 nojalla tiedämme, että indeksi on korkeintaan kaksi. Riittää siis osoittaa, että sivuluokkia on ainakin kaksi, jolloin indeksin on pakko olla tasan kaksi.

Olkoon π jokin perussiirto. Se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\pi = (n_1\ n_2\ n_3\ n_4)(s_1\ s_2\ s_3\ s_4),$$

missä ensimmäinen nelisykleistä permutoi nurkkapaloja ja toinen särmäpaloja.

Jos $\pi \in \mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$, niin π voidaan kirjoittaa tulona $\nu \cdot \sigma$, missä $\nu \in \mathbb{R}_{np}$ ja $\sigma \in \mathbb{R}_{sp}$. Lemman 5.17 nojalla esitys nurkkien ja särmien permutaatioiden tulona on yksikäsitteinen, joten $(n_1\ n_2\ n_3\ n_4) = \nu \in \mathbb{R}_{np}$. Nyt siis siirron ν vaikutus nurkkapaloihin on 4-sykli ja vaikutus särmäpaloihin identtinen permutaatio. Toinen näistä on parillinen permutaatio ja toinen pariton. Lemman 5.17 nojalla ν ei voi olla ryhmän $\mathbb{R}_p$ eikä siis ryhmän $\mathbb{R}_{np}$ alkio. Tämä on ristiriita, joten siirto π ei kuulu tuloryhmään $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$. Siten sivuluokat $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$ ja $\pi(\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp})$ eivät ole samat. $\square$

Tehtävä 2. Päättele edellisen tehtävän nojalla, mikä on paikkaryhmän $\mathbb{R}_p$ kertaluku.

Ratkaisu. Edellisen tehtävän nojalla paikkaryhmän kertaluku on $2k$, missä k on tuloryhmän $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$ kertaluku. Tuloryhmän kertaluku puolestaan on ns, missä n on ryhmän $\mathbb{R}_{np}$ ja s ryhmän $\mathbb{R}_{sp}$ kertaluku.

Luennoilla on näytetty, että jokainen nurkkapalojen tai särmäpalojen 3-sykli on laillinen paikkaryhmän siirto. Tästä seuraa lauseen 3.12 nojalla, että jokainen nurkka- tai särmäpalojen parillinen permutaatio on laillinen. Parillisia permutaatioita on nurkkapalojen paikkaryhmässä $8!/2$ kappaletta ja särmäpalojen paikkaryhmässä $12!/2$ kappaletta. Siispä $n \geq 8!/2$ ja $s \geq 12!/2$.

Näytetään vielä, että nurkka- tai särmäpalojen parittomat permutaatiot eivät ole laillisia. Tällöin $n = 8!/2$ ja $s = 12!/2$.Tämä nähdään esimerkiksi lemmasta 5.17 kuten edellisen tehtävän ratkaisussa. Toinen tapa on matkia harjoituksen 3 tehtävän 3 todistusta: koska jokaisen paikkaryhmän perussiirron etumerkki on 1, myös jokaisen paikkaryhmän siirron etumerkki on 1 eikä nurkka- tai särmäpalojen pariton permutaatio siis ole mahdollinen.

On saatu, että paikkaryhmän $\mathbb{R}_p$ kertaluku on

$$|\mathbb{R}_p| = 2 \cdot \frac{8!}{2} \cdot \frac{12!}{2} = 9656672256000.$$

Tehtävä 3. Olkoon G ryhmä ja olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Näiden alkioiden *kommutaattori* on $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Tarkista seuraavat kommutaattorin ominaisuudet:

i) $[g,h]=e$, jos ja vain jos g ja h kommutoivat keskenään

ii) $[g,h]={}^{g}h\cdot h^{-1}=g\cdot{}^{h}(g^{-1})$

iii) $[g,h]=[h,g]^{-1}$

iv) ${}^{k}[g,h]=\left[{}^{k}g,{}^{k}h\right]$ kaikilla $k\in G$

v) $[g,h]g=g[h,g^{-1}]$ ja $[g,h]h=h[h^{-1},g]$.

Todistus.

i)
$$[g,h]=e \iff ghg^{-1}h^{-1}=e \iff gh=hg$$

ii)
$$\begin{aligned}[g,h]&=ghg^{-1}h^{-1}=(ghg^{-1})h^{-1}={}^{g}h\cdot h^{-1}\\ [g,h]&=ghg^{-1}h^{-1}=g(hg^{-1}h^{-1})=g\cdot{}^{h}(g^{-1})\end{aligned}$$

iii)
$$[g,h]=ghg^{-1}h^{-1}=(hgh^{-1}g^{-1})^{-1}=[h,g]^{-1}$$

iv)
$$\begin{aligned}{}^{k}[g,h]&=kghg^{-1}h^{-1}k^{-1}=kgk^{-1}khk^{-1}kg^{-1}k^{-1}kh^{-1}k^{-1}\\ &=(kgk^{-1})(khk^{-1})(kgk^{-1})^{-1}(khk^{-1})^{-1}\\ &=\left[{}^{k}g,{}^{k}h\right]\end{aligned}$$

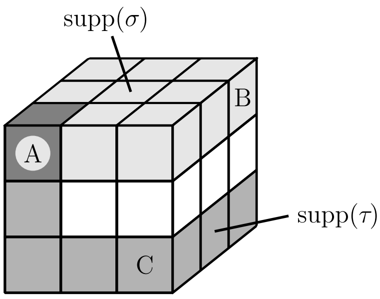
v)
$$\begin{aligned}[g,h]g&=(ghg^{-1}h^{-1})g=g(hg^{-1}h^{-1}g)\\ &=g(hg^{-1}h^{-1}(g^{-1})^{-1})=g[h,g^{-1}]\\ [g,h]h&=(ghg^{-1}h^{-1})h=(hh^{-1})(ghg^{-1}h^{-1})h\\ &=h(h^{-1}ghg^{-1})=h(h^{-1}g(h^{-1})^{-1}g^{-1})\\ &=h[h^{-1},g]\end{aligned}$$

□

Tehtävä 4. Tarkastellaan luentomateriaalin kuvassa 15 näkyvää C-tyyppistä kolmen nurkkapalan kombinaatiota (mitkään kaksi nurkkapalaa eivät ole vierekkäisissä nurkissa). Käyttäen apuna luentomateriaalin lausetta 6.3, etsi Rubikin ryhmän siirrot σ ja τ, joiden kommutaattori $[\sigma,\tau]$ on noiden kolmen nurkkapalan 3-sykli.

Ratkaisu. Tilanne on esitetty oheisessa kuvassa. Lauseen 6.3 perusteella riittää, jos löydetään siirrot σ ja τ, joista σ vie palan A palan B paikalle, τ vie palan A palan C paikalle, ja lisäksi $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \{x\}$, missä x on palan A paikka. Tällöin nimittäin kommutaattori $[\sigma, \tau]$ on 3-sykli, joka liikuttaa vain paloja A, B ja C.

Siirrot σ ja τ löydetään esimerkiksi muokkaamalla hiukan materiaalissa käsiteltyä nurkkapalojen 3-sykliä. Asetetaan $\sigma = U^2$ ja $\tau = LDL^{-1}$. On helppo tarkistaa, että vaaditut ehdot toteutuvat.



Tehtävä 5. Ryhmän G kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää kutsutaan *kommutaattorialiryhmäksi* tai *derivoiduksi aliryhmäksi* ja merkitään G'. Kommutaattorialiryhmä koostuu siis alkioista, jotka ovat muotoa

$$[g_1, h_1]^{s_1}[g_2, h_2]^{s_2} \cdots [g_n, h_n]^{s_n},$$

missä $g_i, h_i \in G$ ja $s_i = \pm 1$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Todista seuraavat väitteet:

a) Jokainen ryhmän G' alkio on muotoa

$$[g_1, h_1][g_2, h_2] \cdots [g_n, h_n],$$

missä $g, h \in G$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) Ryhmä G' on ryhmän G normaali aliryhmä.

c) Tekijäryhmä G/G' on vaihdannainen.

Todistus. a) Tehtävän 3 kohdassa iii) näytettiin, että kommutaattorin käänteisalkio on itsekin kommutaattori. Näin ollen tehtävänannossa mainitussa ryhmän G' alkioiden esityksessä voidaan olettaa, että $s_i = 1$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) Tehtävän 3 kohdassa iv) näytettiin, että kommutaattorin konjugaatit ovat kommutaattoreita. Jos siis g_i ja h_i ovat ryhmän G alkioita kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, nähdään, että

$$^k([g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n]) = {}^k[g_1, h_1] \cdots {}^k[g_n, h_n] \in G' \quad \text{kaikilla } k \in G.$$

Täten ryhmä G' sisältää kaikki konjugaattinsa, eli G' on normaali aliryhmä.

c) Tehtävän 3 kohdan i) perusteella alkiot kommutoivat täsmälleen silloin, kun niiden kommutaattori on neutraalialkio. Ryhmä puolestaan on vaihdannainen, jos sen kaikki alkiot kommutoivat. On siis osoitettava, että kaikki ryhmän G/G' alkioista muodostetut kommutaattorit antavat tulokseksi neutraalialkion, joka ryhmässä G/G' on G'.

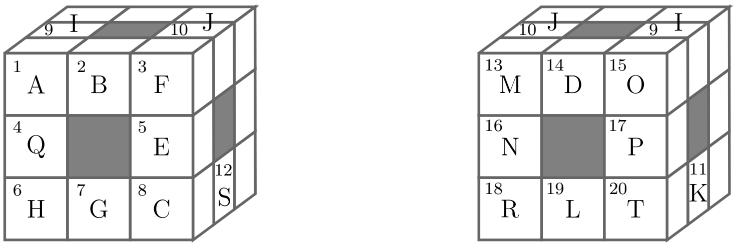
Olkoot $aG', bG' \in G/G'$. Nyt

$$\begin{aligned}[aG', bG'] &= (aG')(bG')(aG')^{-1}(bG')^{-1} = (aG')(bG')(a^{-1}G')(b^{-1}G') \\ &= aba^{-1}b^{-1}G' = [a,b]G' = G',\end{aligned}$$

sillä $[a,b] \in G'$. Siten G/G' on vaihdannainen. □

Tehtävä 6. Merkitään Rubikin kuution palojen paikat numeroin 1–20 oheisen kuvan mukaisesti. Kuvassa sininen sivu on ylöspäin ja keltainen sivu osoittaa katsojaan päin. Oletetaan, että perusasemassa pala A on paikalla 1, pala B paikalla 2 jne.

Tarkoituksena on löytää siirtosarja, jolla kuvan mukaisesta tilanteesta lähtien saadaan kuution palat palautettua perusasemaan.



a) Kirjoita ensin tarvittavaa siirtosarjaa vastaavan permutaation sykliesitys.

b) Osoita, että kuvan asema on tuloryhmässä $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$. (Mitä tekisit, jollei olisi?)

c) Ratkaise sykliesityksestä, miten tarvittavan siirtosarjan permutaatio voidaan kirjoittaa tulona nurkkapalojen ja särmäpalojen 3-sykleistä. Apuna voit käyttää lauseen 3.12 todistusta.

d) Kirjoita tarvittavat 3-syklit opittujen perussyklien konjugaattien avulla.

Ratkaisu. a) Ratkaisuun tarvittavan siirron on siirrettävä esimerkiksi paikassa 3 oleva pala F alkuperäiselle paikalleen, joka on 6. Vastaavan permutaation on siis kuvattava $3 \mapsto 6$. Näin jatkamalla permutaatioksi saadaan

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 6 & 17 & 5 & 8 & 7 & 3 & 9 & 10 & 11 & 19 & 13 & 4 & 15 & 14 & 16 & 18 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

Tämän permutaation sykliesitys on

$$\tau = (3\ 6\ 8)(4\ 17\ 16\ 14)(12\ 19).$$

b) Permutaatio τ voidaan esittää tulona $\nu\sigma$, missä

$$\nu = (3\ 6\ 8) \quad \text{ja} \quad \sigma = (4\ 17\ 16\ 14)(12\ 19).$$

Tässä ν liikuttaa vain nurkkapaloja ja σ vain särmäpaloja. Koska esimerkiksi $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, lauseesta 5.18 seuraa, että, $\tau \in \mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{sp}$.

Jos τ ei olisi tuloryhmässä, voitaisiin suorittaa kuvan asemalle jokin perussiirto. Tämän jälkeen katsottaisiin syntyvää asemaa ja määritettäisiin ratkaisuun tarvittavan permutaation sykliesitys uudelleen. Tämä uusi permutaatio kuuluisi tuloryhmään, sillä perussiirto vaihtaa sekä nurkkien että särmien permutaatioiden etumerkit.

c) Koska sekä nurkka- että särmäpalojen permutaatiot ovat parillisia, ne voidaan kirjoittaa 3-syklien tuloina. Helpoiten tämä käy purkamalla syklit ensin vaihdoiksi, ja yhdistämällä vaihdot sen jälkeen 3-sykleiksi lauseen 3.12 todistuksessa näytetyllä tavalla. Näin saadaan

$$\begin{aligned}\tau &= (3\ 6\ 8)(4\ 17\ 16\ 14)(12\ 19)\\ &= (3\ 6\ 8)(4\ 17)(17\ 16)(16\ 14)(12\ 19)\\ &= (3\ 6\ 8)(4\ 17\ 16)(16\ 14\ 12)(14\ 12\ 19).\end{aligned}$$

d) Olkoon luennoilla opittu nurkkapalojen 3-sykli $\alpha = (1\ 6\ 3)$ ja särmäpalojen 3-sykli $\beta = (2\ 10\ 7)$. Ratkaisuun riittää löytää konjugoivat siirrot, jotka siirtävät palat tuttuun 3-sykliin osallistuvilta paikoilta kulloinkin haluttuun 3-sykliin osallistuville paikoille. Lisäksi on tarkistettava tuloksena saatavan 3-syklin suunta.

Kootaan tulokset taulukkoon:

haluttu 3-sykli	konjugoiva siirto	tulossykli
(3 6 8)	F^2	(8 3 6)
(4 17 16)	$L^{-1}UD^{-1}R$	(17 16 4)
(16 14 12)	U^2DR	(14 16 12)
(14 12 19)	$U^2R^2D^2$	(14 12 19)

Taulukosta nähdään, että

$$\begin{aligned}&(3\ 6\ 8) = {}^{(F^2)}\alpha, \quad (4\ 17\ 16) = {}^{(L^{-1}UD^{-1}R)}\beta,\\ &(16\ 14\ 12) = {}^{(U^2DR)}\beta^{-1} \quad \text{ja} \quad (14\ 12\ 19) = {}^{(U^2R^2D^2)}\beta.\end{aligned}$$

Aseman ratkaisuun tarvittava siirtosarja on siis

$${}^{(F^2)}\alpha \circ {}^{(L^{-1}UD^{-1}R)}\beta \circ {}^{(U^2DR)}\beta^{-1} \circ {}^{(U^2R^2D^2)}\beta.$$