Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Kurssikoe 17.12.2012
Arvosteluperusteita ja ratkaisut tehtäviin (4 sivua)
Jokke Häsä

Kaikista tehtävistä sai maksimissaan 6 pistettä.

Tehtävä 1 oli sujunut hyvin, tosin jotkut eivät osanneet osoittaa aliryhmää $\mathbb{R}_a$ normaaliksi. (Esimerkiksi se, että aliryhmä on vaihdannainen, ei riitä. Onhan esimerkiksi ryhmän S_3 aliryhmä $\{\mathrm{id}, (12)\}$ vaihdannainen, muttei normaali, kuten kurssilla Algebra I on todettu.) Tällöin menetti kuitenkin vain yhden pisteen.

Tehtävässä 2 monet olivat osoittaneet onnistuneesti, että $\mathbb{Z}_{12}$ saadaan kahden aliryhmänsä summana, mutta summan suoruus oli jäänyt tarkistamatta. Tällöin saattoi saada koko tehtävästä vain 2 pistettä.

Tehtävä 3 oli tarkoitettu helpoksi, mutta osoittautui vaikeaksi. Jokainen kohta oli 1,5 pisteen arvoinen. Yleisin virhe oli, että sekoitettiin paikkaryhmän ja Rubikin ryhmän siirrot. Paikkaryhmässä kaikki siirrot ovat parillisia, mutta Rubikin ryhmässä näin ei ole, joten parillisuusperustelua ei voi käyttää esimerkiksi särmäpalan käännön tapauksessa. (Tosin särmäryhmässä $\mathbb{R}_s$ siirrot ovat parillisia, joten sitä olisi voinut käyttää, vaikkei sitä ollut luennoilla osoitettu.)

Tehtävä 4 oli haastavampi tehtävä. Osa oli tajunnut todistuksen idean, muttei ollut osannut kirjoittaa sitä selkeästi ylös. Tällöin kuitenkin menetti vain pari pistettä. Jos oli osannut kirjoittaa keskuksen määritelmän eli sanoa, mitä yritetään todistaa, sai jo yhden pisteen.

Tehtävä 5 sujui yleisesti hyvin. Tehtävässä pärjäsi sitkeästi laskemalla, mutta työ helpottui paljon, kun käytti esimerkiksi tietoa, että konjugaattiluokat muodostavat osituksen tai että kunkin konjugaattiluokan koko jakaa ryhmän kertaluvun. Tärkeää oli huomata ja osoittaa, että kaikki 5-syklit eivät ole samassa konjugaattiluokassa.

Koska erityisesti kolmostehtävä osoittautui liian vaikeaksi, arvosanarajoja laskettiin reilusti. Maksimipistemäärä oli 30, mutta läpipääsyyn riitti 11 pistettä, kakkoseen 13, kolmoseen 16, neloseen 19 ja viitoseen 22 pistettä.

Tehtävä 1. Määrittele Rubikin asentoryhmä $\mathbb{R}_a$. Osoita, että asentoryhmä on Rubikin ryhmän normaali aliryhmä, ja määrittele sen avulla Rubikin paikkaryhmä $\mathbb{R}_p$.

Ratkaisu. Rubikin asentoryhmä $\mathbb{R}_a$ koostuu niistä laillisista siirroista, jotka eivät siirrä paloja paikoiltaan. Osoitetaan, että kyseessä on Rubikin ryhmän normaali aliryhmä.

Osoitetaan ensin, että $\mathbb{R}_a$ on aliryhmä tarkistamalla seuraavat kohdat.

1) Jos siirrot σ ja τ pitävät kaikki palat paikoillaan, myös niiden yhdistelmä $\sigma \circ \tau$ pitää kaikki palat paikoillaan. Täten $\mathbb{R}_a$ on suljettu laskutoimituksen suhteen.

2) Rubikin ryhmän neutraalialkio id pitää palat paikoillaan, joten se on joukossa $\mathbb{R}_a$.

3) Jos siirto σ pitää palat paikoillaan, myös sen käänteissiirto σ^{-1} pitää palat paikoillaan. Täten myös jokaisen siirron käänteissiirto löytyy joukosta $\mathbb{R}_a$.

On näytetty, että $\mathbb{R}_a$ on aliryhmä. Osoitetaan vielä, että se on normaali. Olkoot tätä varten $\sigma \in \mathbb{R}$ ja $\tau \in \mathbb{R}_a$. Tarkastellaan, miten konjugaatti $\tau\sigma\tau^{-1}$ siirtää paloja.

Oletetaan, että τ^{-1} siirtää palan A paikasta x paikkaan y. Koska σ ei siirrä mitään paloja paikoiltaan, myös yhdistelmä $\sigma\tau^{-1}$ siirtää palan A paikkaan y. Toisaalta τ siirtää palat käänteisesti siirtoon τ^{-1} nähden, joten τ siirtää palan A paikasta y takaisin paikkaan x. Kokonaisuutena konjugaatti $\tau\sigma\tau^{-1}$ ei siis siirrä palaa A lainkaan, joten konjugaatti kuuluu aliryhmään $\mathbb{R}_a$. Täten $\mathbb{R}_a$ on normaali.

Rubikin paikkaryhmä on tekijäryhmä $\mathbb{R}_p = \mathbb{R}/\mathbb{R}_a$. Se koostuu siis sivuluokista $\sigma\mathbb{R}_a$, missä $\sigma \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 2. Tarkastellaan syklistä jäännösluokkaryhmää $\mathbb{Z}_{12} = \{[0], [1], \ldots, [11]\}$, jossa laskutoimituksena on jäännösluokkien yhteenlasku. Osoita, että $\mathbb{Z}_{12}$ on joidenkin kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora summa.

Todistus. Valitaan aliryhmät

$$H = \{[0], [4], [8]\} \quad \text{ja} \quad K = \{[0], [3], [6], [9]\}.$$

Jotta aliryhmien summa $H + K$ olisi suora, täytyy niiden leikkauksen olla triviaali ja lisäksi kaikilla $h \in H$ ja $k \in K$ täytyy päteä $hk = kh$. Selvästi nähdään, että $H \cap K = \{0\}$, ja myös vaihdannaisuusehto pätee, sillä ryhmä $\mathbb{Z}_{12}$ on vaihdannainen. Summa $H + K$ on siis suora.

Taulukoimalla summan $H + K$ alkiot nähdään, että summa on koko ryhmä $\mathbb{Z}_{12}$:

+	[0]	[3]	[6]	[9]
[0]	[0]	[3]	[6]	[9]
[4]	[4]	[7]	[10]	[1]
[8]	[8]	[11]	[2]	[5]

Siispä $\mathbb{Z}_{12}$ on aliryhmiensä H ja K suora summa. □

Tehtävä 3. Mitkä seuraavista siirroista ovat laillisia Rubikin kuution siirtoja eli kuuluvat Rubikin ryhmään $\mathbb{R}$? Perustele lyhyesti kurssilla käytetyin käsittein.

1) kahden särmäpalan paikkojen vaihto (asennoista välittämättä)

2) yhden särmäpalan kääntö paikallaan

3) kahden särmäpalan paikkojen vaihto ja neljän nurkkapalan paikkojen 4-sykli yhtä aikaa (asennoista välittämättä)

4) kolmen nurkkapalan kiertäminen paikoillaan kolmanneskierroksen verran myötäpäivään

Ratkaisu.

1) Koska asennoista ei välitetä, on kyse paikkaryhmästä $\mathbb{R}_p$ (eli palojen permutaatioista). Paikkaryhmässä jokainen alkio on parillinen permutaatio, mutta kahden särmäpalan paikkojen vaihto on pariton. Siispä siirto ei ole laillinen.

2) Yhden särmäpalan kääntö muuttaisi särmäpalojen kokonaiskiertymää yhdellä. Kokonaiskiertymä kuitenkin säilyy kaikissa laillisissa siirroissa vakiona, joten siirto ei ole laillinen.

3) Tarkastellaan jälleen tilannetta paikkaryhmässä. Haluttu siirto voidaan kirjoittaa tulona $\nu\sigma$, missä ν on nurkkien 4-sykli ja σ särmäpalojen vaihto. On näytetty, että tällainen siirto on laillinen täsmälleen silloin, kun $\operatorname{sign}(\nu) = \operatorname{sign}(\sigma)$. Koska sekä ν että σ ovat parittomia permutaatioita, siirto on laillinen.

4) Kurssilla on näytetty, että siirto, joka kiertää kahta vierekkäistä kulmapalaa kolmanneskierroksen eri suuntiin, on laillinen. Tehdään tämä ensin paloille A ja B niin, että A kiertyy myötä- ja B vastapäivään. Tehdään sama sitten paloille B ja C niin, että C kiertyy myötä- ja B vastapäivään. Tällöin A ja C ovat kiertyneet kolmanneskierroksen myötäpäivään, ja B on kiertynyt kaksi kolmanneskierrosta vastapäivään, mikä on sama kuin kolmanneskierros myötäpäivään. Siirto on siis laillinen.

Tehtävä 4. Niin kutsuttu *superkääntö* on asentoryhmän siirto, joka kääntää kaikki särmäpalat ympäri. Osoita, että superkääntö on Rubikin ryhmän keskuksessa.

Todistus. Ryhmän keskukseen $\zeta\mathbb{R}$ kuuluvat täsmälleen ne alkiot, jotka eivät muutu konjugoitaessa. Olkoon σ tehtävässä kuvattu superkääntö. Osoitetaan, että $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$ kaikilla $\tau \in \mathbb{R}$.

Olkoon $\tau \in \mathbb{R}$. Superkääntö pitää kaikki nurkkaruudut paikoillaan, joten voidaan rajoittua tarkastelemaan särmäruutuja. Olkoon x eräs särmäruudun paikka ja olkoon y saman särmäpalan toisen ruudun paikka. Oletetaan, että särmäpaikat a ja b ovat sellaiset, että $\tau(a) = x$ ja $\tau(b) = y$, jolloin erityisesti a ja b ovat jonkin särmäpalan kahden ruudun paikat.

Nyt superkäännölle pätee $\sigma(x) = y$ ja toisaalta superkäännön konjugaatille pätee

$$\tau\sigma\tau^{-1}(x) = \tau\sigma(a) = \tau(b) = y.$$

Koska superkääntö ja sen konjugaatti kuvaavat mielivaltaisen särmäruudun x samalla tavalla (eivätkä liikuta nurkkaruutuja mitenkään), kyseessä on sama siirto. Siispä $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. □

Tehtävä 5. Eräs ryhmän S_5 aliryhmistä on viisikulmion symmetriaryhmä

$$\begin{aligned} D_{10} = \{ \, &\mathrm{id},\ (12345),\ (13524),\ (14253),\ (15432) \\ &(25)(34),\ (13)(45),\ (15)(24),\ (12)(35),\ (14)(23) \, \}. \end{aligned}$$

Määritä ryhmän D_{10} konjugaattiluokat ja keskus.

Ratkaisu. Ryhmän neutraalialkio on aina yksin omassa konjugaattiluokassaan. Lisäksi konjugointi ei voi muuttaa permutaation syklityyppiä, joten vaihtojen tulo ja 5-sykli eivät voi olla samassa konjugaattiluokassa. Tarvitsee siis vain selvittää, mitkä vaihtojen tulot ja toisaalta mitkä 5-syklit ovat toistensa kanssa samassa konjugaattiluokassa.

Pieni lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned} &{}^{(12345)}((25)(34)) = (31)(45) = (13)(45), \\ &{}^{(13524)}((25)(34)) = (42)(51) = (15)(24), \\ &{}^{(14253)}((25)(34)) = (53)(12) = (12)(35) \\ \text{ja} \quad &{}^{(15432)}((25)(34)) = (14)(23). \end{aligned}$$

Jokainen vaihtojen tulo on siis alkion $(25)(34)$, joten ne ovat kaikki samassa konjugaattiluokassa.

Toisaalta 5-sykleistä nähdään, että

$$\begin{aligned} &{}^{(25)(34)}(12345) = (15432) \\ \text{ja} \quad &{}^{(25)(34)}(13524) = (14253). \end{aligned}$$

Siispä ainakin alkiot (12345) ja (15432) ovat toistensa konjugaatteja, samoin kuin alkiot (13524) ja (14253). Täytyisi enää selvittää, kuuluvat nämä kaikki samaan konjugaattiluokkaan vai muodostavatko ne kaksi erillistä luokkaa. Tämän saisi selville konjugoimalla esimerkiksi alkiota (12345) kaikilla mahdollisilla alkioilla, mutta asia voidaan päätellä myös toisin.

Kurssilla osoitettiin, että konjugaattiluokan ${}^{G}x$ koko on sama kuin keskittäjän $C_G(x)$ indeksi. Aliryhmän indeksi puolestaan jakaa aina ryhmän kertaluvun, joten erityisesti jokaisen konjugaattiluokan koko jakaa ryhmän kertaluvun. Ryhmän D_{10} kertaluku on 10, joten konjugaattiluokkien mahdolliset koot ovat 1, 2, 5 ja 10. Missään konjugaattiluokassa ei siis voi olla täsmälleen neljää alkiota, joten 5 syklit eivät voi olla kaikki samassa konjugaattiluokassa.

Konjugaattiluokat ovat siis

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{id}\}, \quad \{(25)(34), (13)(45), (15)(24), (12)(35), (14)(23)\}, \\ &\{(12345), (15432)\} \quad \text{ja} \quad \{(13524), (14253)\}. \end{aligned}$$

Ryhmän keskukseen kuuluvat ne alkiot, jotka eivät muutu konjugoitaessa. Ne ovat siis täsmälleen ne alkiot, jotka ovat yksin omassa konjugaattiluokassaan. Listatuista konjugaattiluokista nähdään, että ryhmän D_{10} keskus on $\{\mathrm{id}\}$.