582456 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

Harjoitus 11 (26. huhtikuuta)

Yhteinen vihje tehtäviin 2 ja 3: katso alkuperäisartikkelia

> Kamal Jain and Vijay V. Vazirani. Approximation algorithms for metric facility location and k-median problems using the primal-dual schema and Lagrangian relaxation. *Journal of the ACM* 48(2):274–296, March 2001. `http://doi.acm.org/10.1145/375827.375845`

johon kirjan luvut 24 ja 25 perustuvat.

1. (Vazirani 24.2) Muutetaan laitostensijoitteluongelman algoritmia siten, että vaiheessa 2 (luennot s. 340) laitetaankin verkkoon H kaari (i, i'), jos jollain j kaaret (i, j) ja (i', j) ovat tiukkoja (siis ei välttämättä erityisiä). Osoita, että luentojen lemma 3.76 (jonka mukaan $c_{ij} \leq 3\alpha_j^e$) ei enää päde. Korjaa algoritmia niin, että analyysi taas pätee.

   Vihje: numeroi laitoksen niiden tilapäisen avaamisen aikajärjestyksessä ja valitse verkossa H leksikografisesti ensimmäinen maksimaalinen riippumaton joukko.

2. (Vazirani 24.9) Tarkastellaan tuotantolaitosten sijoitteluongelman versiota, jossa tuotantolaitoksella i on kapasiteetti u_i kuten harjoituksen 10 tehtävässä 4. Nyt lisäksi saman laitoksen saa avata useita kertoja. Jos laitos i on avattu y_i kertaa, se voidaan yhdistää $u_i y_i$ kaupunkiin. Esitä kokonaislukuohjelma ja sen lineaarinen löysennös ja duaali. Muokkaa luentojen algoritmi antamaan vakioapproksimaatio tälle ongelmalle.

3. (Vazirani 25.6) *Ryvästysongelmassa* on annettu pisteet $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^d$ ja *ryvästen* lukumäärä k. Tehtävänä on valita k *ryväskeskipistettä* $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k \in \mathbb{R}^d$ siten, että kustannus

   $$\sum_{i=1}^{n} d(\boldsymbol{v}_i, \{\, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k \,\})$$

   minimoituu, missä

   $$d(\boldsymbol{v}_i, \{\, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k \,\}) = \min_{1 \leq j \leq k} \|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{f}_j\|_2^2$$

   on pisteen $\boldsymbol{v}_i$ neliöity euklidinen etäisyys lähimmästä ryväskeskipisteestä.

   Esitä ongelmalle vakioapproksimaatioalgoritmi.

4. (Vazirani 29.2) Osoita, että $\mathrm{PCP}(\log n, \mathrm{poly}(n)) \subseteq \mathrm{NP}$. Päättele tästä (PCP-teoreemaa käyttäen), että $\mathrm{PCP}(\log n, 1) = \mathrm{PCP}(\log n, \mathrm{poly}(n))$.

   Vihje: Arvaa todistus epädeterministisesti ja simuloi todistuksen tarkastajaa kaikilla mahdollisilla satunnaisjonoilla.