

## 582465 Approksimointialgoritmit (kevät 2010)

2. kurssikoe 6.5. kello 9–12 auditorio A111

vastuhenkilö Jyrki Kivinen

Vastaa kaikkien tehtävien kaikkiin kohtiin. Kokeen maksimipistemäärä on 20 pistettä. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

1. [8 pistettä] Kurssilla on käsitelty kysyntäpohjaista monihyödykevuota (demands multicommodity flow; muistin virkistykseksi ongelman määritelmä on toistettu kääntöpuolella).

- (a) Esitä ongelma lineaarisena kokonaislukuohjelmana. Muodosta tämän ohjelman lineaarisen löysennöksen duaali.
- (b) Osoita, että maksimituotanto  $f^*$  toteuttaa yhtälön

$$f^* = \min_d \frac{\sum_{e \in E} c_e d_e}{\sum_{i=1}^k \text{dem}(i) d_{(s_i, t_i)}}.$$

Tässä minimointi on yli metriikoiden  $d$ . Siis  $d$  liittyy kaareen  $e$  pituuden  $d_e$  siten, että kolmioepähälö pätee.

2. [6 pistettä] Kurssilla on käsitelty monensuuntaista leikkausongelmaa (multiway cut) sekä osajoukkotakaisinkytkentäongelmaa kaarille ja solmuille. Muistin virkistykseksi ongelmien määritelmät on toistettu kääntöpuolella. Osoita seuraavat näiden ongelmien väliset suhteet:

- (a) Monensuuntaisesta leikkauksesta on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan kaarille.
- (b) Osajoukkotakaisinkytkentäongelmasta kaarille on approksimointisuhteen säilyttävä palautus osajoukkotakaisinkytkentäongelmaan solmuille.

3. [6 pistettä] Kurssilla on todettu, että PCP-teoreeman perusteella jollain  $\varepsilon > 0$  on olemassa raon  $\varepsilon$  tuottava polynomisessa ajassa laskettava palautus  $f$  SAT-ongelmasta MAX-3SAT-ongelmaan. Siis kun  $\psi = f(\varphi)$ , missä  $\varphi$  on SAT-tapaukseksi tulkittu propositiologiikan kaava ja  $\psi$  MAX-3SAT-tapaukseksi tulkittu propositiologiikan kaava, niin

- jos  $\varphi \in \text{SAT}$ , niin  $\text{OPT}(\psi) = m$
- jos  $\varphi \notin \text{SAT}$ , niin  $\text{OPT}(\psi) < (1 - \varepsilon)m$

missä  $m$  on kaavan  $\psi$  klausuulien lukumäärä.

Osoita kääntäen, että jos on olemassa tällainen palautus  $f$ , niin  $\text{SAT} \in \text{PCP}(\log n, 1)$ . (PCP-teoreema seuraa tästä helposti.)

*Vihje:* Muunna SAT-tapaus  $\varphi$  3SAT-tapaukseksi  $\psi$ . Tarkastaja olettaa todistuksen olevan optimaalinen totuusarvoasetus ja saavuttaa virhetodennäköisyyden  $1 - \varepsilon$ . Toista tarvittavan virhetodennäköisyyden saavuttamiseksi.

Tentissä esiintyvien optimointiongelmiä määritelmiä:

**Kysyntäpohjaisessa monihyödykevuossa** on annettu verkko  $G = (V, E)$ , päätesolmuparit  $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$  ja kaarten kapasiteetit  $c_e$ . Lisäksi hyödykkeelle  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , on annettu *kysyntä*  $\text{dem}(i)$ . Oletamme, että kahdella eri hyödykkeellä  $i \neq j$  pätee  $\{s_i, t_i\} \neq \{s_j, t_j\}$ .

Tehtävänä on maksimoida *tuotanto* (throughput)  $f$  ehdolla, että hyödykkeen  $i$  vuo solmusta  $s_i$  solmuun  $t_i$  on ainakin  $f \cdot \text{dem}(i)$  kaikilla  $1 \leq i \leq k$ . Kunkin yksittäisen hyödykkeen vuo toteuttaa normaalit vuon säilymisedot. Kaaren  $e$  yli kulkeva vuo saa olla korkeintaan  $c_e$ , kun lasketaan yhteen kaikki hyödykkeet ja kumpikin suunta.

**Monensuuntaisessa leikkausongelmassa** on annettu verkko  $G = (V, E)$ , kaarten painofunktio  $w: E \rightarrow \mathbb{Q}_+$  ja päätesolmujen joukko  $\{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ . Tehtävänä on löytää painoltaan pienin kaarijoukko, jonka poistaminen leikkaa kaikki päätesolmut erilleen eli joka kaikilla  $i \neq j$  sisältää ainakin yhden kaaren jokaiselta solmujen  $s_i$  ja  $s_j$  väliseltä polulta.

**Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa kaarille** on annettu verkko  $G = (V, E)$ , joukko *kiinnostavia* solmuja  $S \subseteq V$  ja kaarten painofunktio  $w: E \rightarrow \mathbb{Q}_+$ . Verkon  $G$  sykli on kiinnostava, jos se sisältää ainakin yhden kiinnostavan solmun. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäkaarijoukko* (subset feedback edge set) eli kaarijoukko, joka sisältää ainakin yhden kaaren jokaisesta kiinnostavasta syklistä.

**Osajoukkotakaisinkytkentäongelmassa solmuille** on annettu verkko  $G = (V, E)$ , joukko *kiinnostavia* solmuja  $S \subseteq V$  ja ei-kiinnostavien solmujen painofunktio  $w: V - S \rightarrow \mathbb{Q}_+$ . Verkon  $G$  sykli on kiinnostava, jos se sisältää ainakin yhden kiinnostavan solmun. Tehtävänä on löytää painoltaan pienin *osajoukkotakaisinkytkentäsolmujoukko* (subset feedback vertex set) eli ei-kiinnostavien solmujen joukko, joka sisältää ainakin yhden solmun jokaisesta kiinnostavasta syklistä.