58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)
Harjoitus 1 (29.–30. tammikuuta)

1. Järjestä seuraavat funktiot kertaluokkiensa mukaiseen järjestykseen:

$$\begin{array}{l} n, \quad \log n, \quad (\log n)^2, \quad \sqrt{n}(\log n)^2, \quad (\tfrac{3}{2})^n, \\ \sqrt{n}, \quad \log\log n, \quad \tfrac{n}{\log n}, \quad (\tfrac{1}{3})^n, \quad 17\ . \end{array}$$

   (Tässä ja jatkossa $\log n = \log_2 n$.)

2. Tarkastellaan algoritmeja A ja B, joiden aikavaatimuksille pätee $T_A(n) = an^\alpha$ ja $T_B(n) = b\beta^n$ joillakin vakioilla $a, b, \alpha > 0$, $\beta > 1$. Oletetaan, että yhdessä aikayksikössä kumpikin algoritmi pystyy käsittelemään kokoa N olevia syötteitä; siis N on vakio, jolle $T_A(N) = T_B(N) = 1$. Kuinka suuria syötteitä algoritmit A ja B pystyvät käsittelemään 2 aikayksikössä? (Ts. määrää luvuista N, α ja β riippuvat luvut N_A ja N_B s.e. $T_A(N_A) = T_B(N_B) = 2$.)

3. Olkoon $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ sellainen, että $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$. Osoita, että funktiolla $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ pätee $f = O(g)$ jos ja vain jos on olemassa $a, b > 0$ joilla

$$f(n) \le ag(n) + b$$

   kaikilla n.

4. Palautetaan mieleen kertomafunktio: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Osoita, että

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log i = \Theta(n \log n)\ .$$

   Vihje: Muodosta summalle yläraja termin $\log n$ avulla ja alaraja termin $\log(n/2)$ avulla.

5. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\log n).$$

   Vihje: käytä hyväksi tietoa, että $\int (1/x)dx = \ln x$ ja arvioi summaa sopivilla määrätyillä integraaleilla.