58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)
Harjoitus 2 (5.–6. helmikuuta)

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt, kun $T(1) = 1$ ja rajoitutaan "sopiviin" argumentin n arvoihin:

   (a) $T(n) = 2T(n/2) + \log n$
   (b) $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$.

   (Anna tarkka vastaus, ei pelkästään suuruusluokkaa. Tarkista vastauksesi.)

2. Oletetaan, että tunnet vaativuudeltaan kertaluokkaa $\Theta(n^2)$ olevan yksinkertaisen algoritmin jonkin ongelman ratkaisuun. Oletetaan edelleen, että tiedät, miten ongelman kokoa n oleva tapaus voitaisiin palauttaa *kolmeen* kokoa $n/2$ olevaan tapaukseen, joista yhdistämällä alkuperäisen tapauksen vastaus voitaisiin muodostaa lineaarisessa ajassa. Osatapaukset voidaan muodostaa ajassa $\Theta(n^\alpha)$. Miten pieni täytyy vakion α olla, jotta osittamiseen perustuva ratkaisualgoritmi olisi asymptoottisesti tehokkaampi kuin alussa mainittu yksinkertainen algoritmi?

3. Tarkastellaan funktioita T ja U joilla $T(1) = U(1) = 1$ ja

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(\lfloor n/3 \rfloor) + n^2 \\ U(n) &= 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 \end{aligned}$$

   kun $n > 1$, missä $a > 0$ on vakio. Millä vakion a arvoilla pätee $T(n) = O(U(n))$? (Voit käyttää hyväksesi sitä seikkaa, että master-lause pysyy voimassa vaikka argumentteihin liitetään lattiafunktio yo. tavalla.)

4. Ratkaise rekursioyhtälö

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n, \qquad n > 1; \end{aligned}$$

   Voit rajoittua "sopiviin" arvoihin n.

5. Osoita, että rekursioyhtälön

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 5) + n, \qquad n > 1 \end{aligned}$$

   ratkaisulle pätee $T(n) = O(n \log n)$.