

58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)

Harjoitus 3 (12.–13. helmikuuta)

1. Ratkaise generoivia funktioita käyttäen rekursioyhtälö

$$\begin{cases} t_0 = 3, & t_1 = 3, \\ t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

2. Tarkastellaan seuraavaa algoritmia taulukon $A[1 \dots n]$ minimin ja maksimin määrittämiseksi:

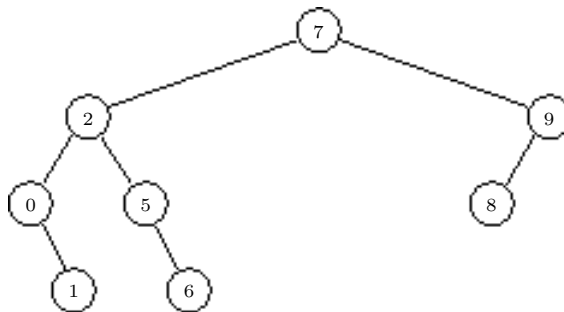
```
MinMax(A[1..n]):
max := A[1]
min := A[1]
for i := 2 to n do
  if A[i] > max then max := A[i]
  else if A[i] < min then min := A[i]
end for
```

Halutaan määrätä algoritmin tekemien vertailujen ($A[i] > \text{MAX}$ tai $A[i] < \text{MIN}$) lukumäärän odotusarvo $T_{\text{ave}}(n)$. Osoita, että funktiolle $T_{\text{ave}}(n)$ pätee palautuskaava

$$\begin{aligned} T_{\text{ave}}(1) &= 0, \\ T_{\text{ave}}(n) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} T_{\text{ave}}(i) \right) + n - \frac{1}{n} \quad \text{kun } n \geq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

(*Vihje:* jaa tarkastelu sen mukaan, mikä on taulukon suurimman alkion indeksi.)

3. Ratkaise edellisessä tehtävässä saatu rekursioyhtälö (1) tarkasti (siis vakiokertoimet ja alemman kertaluokan termit mukaanlukien). (*Vihje:* Tarkastelemalla kombinaatiota $a \cdot T_{\text{ave}}(n) - b \cdot T_{\text{ave}}(n-1)$, missä a ja b riippuvat parametrilla n sopivalla tavalla, voit eliminoida palautuskaavasta summauksen. Vastauksessa esiintyy summa $H_n = \sum_{i=1}^n (1/i)$.)
4. Palautetaan mieliin binäärinen etsintäpuu, jossa ei käytetä mitään tasapainotusta tms. ja alkioit talletetaan sisäsolmuihin. Siis alkioiden 7, 2, 9, 0, 5, 6, 8, 1 lisääminen aluksi tyhjään puuhun tuottaa tuloksen



ja solmun lisääminen tasolle i edellyttää i vertailua. Osoita, että lisättäessä n alkioita aluksi tyhjään puuhun tarvittavien vertailujen lukumäärä on keskimäärin $\Theta(n \log n)$ ja pahimmassa tapauksessa $\Theta(n^2)$. (*Vihje:* keskimääräisen tapauksen rekursioyhtälö on samaa tyyppiä kuin tehtävän 2 yhtälö. Lisääpua löytyy tarvittaessa oppikirjoista.)

5. Tarkastellaan luennolla esitettyä sanakirjaongelmaa, kun käsiteltävänä on kolme alkioita ja niihin kohdistuvien access-operaatioiden todennäköisyydet ovat $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$ ja $p_3 = 1/4$. Laske algoritmien DP ja MF asympotoottiset keskimääräiset suoritusaajat $T_{\text{ave}}^{\text{DP}}$ ja $T_{\text{ave}}^{\text{MF}}$.