

58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)

Harjoitus 4 (19–20. helmikuuta)

1. Tarkastellaan hyvin yksinkertaista säämallia, jossa päivän sää voi olla aurinkoinen, pilvinen tai sateinen. Oletetaan, että huomisen sää riippuu ainoastaan tämänpäiväisestä säästä seuraavasti:
 - Jos tänään on aurinkoista, niin huomenna on aurinkoista todennäköisyydellä 0,3; muuten huomenna on pilvistä.
 - Jos tänään on pilvistä, niin huomenna on pilvistä todennäköisyydellä 0,8; muuten huomenna sataa.
 - Jos tänään sataa, niin huomennakin sataa todennäköisyydellä 0,4; muuten huomenna on aurinkoista.

Kuinka paljon tämän mallin mukaan on pitkän ajanjakson aikana odotettavissa aurinkoisia päiviä suhteessa sateisiin?

2. Tarkastellaan luennolla esitettyä sanakirjaongelmaa, kun käsiteltävänä on kolme alkiota ja niihin kohdistuvien access-operaatioiden todennäköisyydet ovat $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$ ja $p_3 = 1/4$. Muodosta TR-algoritmin tilaa kuvaava Markovin ketju. Määritä ketjun tasapainojakauma ja laske sen perusteella algoritmin keskimääräinen aikavaatimus $T_{\text{ave}}^{\text{TR}}$.
3. Ohjelma käsittelee kahta pinoa S ja T , joihin voidaan tavallisten pino-operaatioiden (PUSH, POP) lisäksi kohdistaa kopiointioperaatioita $\text{COPY}(S, T)$ ja $\text{COPY}(T, S)$. (Operaation $\text{COPY}(P, Q)$ jälkeen kumpikin pino on samassa tilassa kuin pino P ennen operaatiota.) Suunnittele pinoille taulukkototeutus, jossa kopiointioperaation yhteydessä ainoastaan edellisen kopiointin jälkeen tapahtuneet muutokset päivitetään pinosta toiseen. Osoita, että tässä toteutuksessa minkä tahansa aluksi samansisältöisiin pinoihin kohdistuvan n operaation jonon kokonaissuoritus-aika on $O(n)$.
4. Esitä, miten jono (operaatiot ENQUEUE ja DEQUEUE) voidaan toteuttaa käyttämällä kahta pinoa (operaatiot PUSH, POP ja STACK-EMPTY). Osoita, että jono-operaatioiden tasoitettu aikavaatimus on $O(1)$ per operaatio.
5. Tarkastellaan sanakirjaongelman algoritmien $A \in \{ \text{MF}, \text{TR}, \text{FC} \}$ aikavaatimuksia $T^A(s)$ operaatiojonolle s , missä s on m operaatiota sisältävä operaatiojono ja n on operaatioissa esiintyvien eri alkioiden lukumäärä.
 - (a) Osoita, että jollekin operaatiojonolle s pätee $T^{\text{MF}}(s) = O(m + n^2)$ ja $T^{\text{TR}}(s) = \Omega(mn)$.
 - (b) Osoita, että jollekin operaatiojonolle s pätee $T^{\text{MF}}(s) = O(m + n^2)$ ja $T^{\text{FC}}(s) = \Omega(mn)$.

Vihje: Jos jono on keskimääräisen tapauksen analyysissä tehdyn jakaumaoletuksen mukainen, TR ja FC ovat ainakin yhtä hyviä kuin MF. Sinun pitää siis tarkastella operaatiojonoja, jotka selvästi ”rikkovat” jakaumaoletusta.