

58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)

Harjoitus 9 (25.–26. maaliskuuta)

1. Anna esimerkki tilanteesta, jonka seurauksena Fibonacci-kasan juurilistaan jää merkitty solmu.
2. Anna esimerkki operaatiojonosta, jonka tuloksena syntyvässä Fibonacci-kasassa on vain yksi puu ja tässä puussa vain yksi haara. Toisin sanoen kaikki solmut ovat samalla lehdestä juureen kulkevalla polulla. Yleistä konstruktio mielivaltaiselle n niin, että haaran pituudeksi tulee tasan n . Operaatioiden lukumäärällä ei ole merkitystä.
3. Osoita, että luokkaan perustuva tasapainotus ilman mitään polkujen tiivistämistä takaa *Union-Find*-operaatioiden suorituksen ajassa $O(\log n)$ per operaatio. Anna esimerkki $O(n)$ operaatiosta n alkiolla siten, että aikavaativuudeksi tosiaan tulee $\Omega(n \log n)$.

Vihje: alarajaa varten tarkastele binomipuita.

4. Tarkastellaan UNION-FIND-ongelman erikoistapausta, jossa operaatioiden järjestys on sellainen, että
 - (a) ensin tehdään kaikki MAKE-SET-operaatiot,
 - (b) sitten tehdään kaikki UNION-operaatiot ja
 - (c) lopuksi tehdään kaikki FIND-operaatiot.

Osoita, että tässä rajoitetussa erikoistapauksessa pelkkä poluntiivistys ilman mitään tasapainotusta riittää takaamaan suorituksen tasoitettussa ajassa $O(1)$ per operaatio.

5. Toteutetaan *Union-Find*-rakenne linkitettyinä metsänä käyttäen poluntiivistystä, mutta ilman puiden tasapainotusta. Osoita, että $O(n)$ operaation jono n alkiolla voi vaatia ajan $\Omega(n \log n)$.
Vihje: Edellisten tehtävien nojalla UNION- ja FIND-operaatioiden pitää mennä limittäin, ja pitää tapahtua epätasapainoisia linkityksiä. Tässäkin binomipuut auttavat.