58053-7 Algoritmien suunnittelu ja analyysi (kevät 2004)
Harjoitus 13 (29.–30. huhtikuuta)

1. Osoita, että jos solmupeiteongelman päätösversio VC (joka siis on NP-täydellinen) osattaisiin ratkaista polynomisessa ajassa, niin myös vastaava etsintäongelma osattaisiin.

2. Tarkastellaan solmupeiteongelman ahnetta heuristiikkaa, joka aina seuraavaksi valitsee muodostettavaan solmupeitteeseen solmun, joka peittää mahdollisimman monta vielä peittämättä olevaa kaarta. Osoita, että tämä **ei** ole 2-approksimointialgoritmi. (*Vihje:* Tarkastele kaksijakoisia verkkoja, joissa toisen puolen solmujen asteluku on vakio.)

3. Täydellisen verkon G solmujoukko V muodostuu tason pisteistä (i, j), missä $i = 1, 2, 3$ ja $j = 1, 2, 3$. Solmuja on siis yhdeksän kappaletta. Solmujen välisen kaaren kustannus on yhtä kuin solmujen etäisyys tasossa. Muodosta verkkoon G kauppamatkustajan reitti käyttämällä luennolla esitettyjä kahta ΔTSP-approksimointialgoritmia (MST-TSP ja Christofidesin algoritmi). Kokeile kahta (tai useampaa) erilaista pienintä virittävää puuta algoritmien lähtökohtana. Kuinka suureen tai pieneen suhteelliseen virheeseen algoritmit päätyvät tässä esimerkkiverkossa?

4. Repunpakkausongelmassa on annettu n hinta-koko lukuparia (v_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, ja luku C. Kyse on aina positiivisista kokonaisluvuista, ja $c_i \leq C$ kaikille i. Tehtävänä on löytää $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, jolle $\sum_{i \in I} c_i \leq C$ ja arvo $\sum_{i \in I} v_i$ on suurin mahdollinen. Ongelma on tunnetusti NP-kova.

   Oletetaan, että alkiot on jo lajiteltu yksikköhinnan $\frac{v_i}{c_i}$ mukaiseen laskevaan järjestykseen, eli $\frac{v_1}{c_1} \geq \frac{v_2}{c_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{c_n}$. Luonteva ahne heuristiikka käsittelee alkiot järjestyksessä $i = 1, 2, \ldots, n$ ja lisää käsitellyn alkion reppuun aina, jos sille on vielä tilaa. Osoita, että jos syötteelle T optimaalisen ratkaisun arvo on $\text{opt}(T)$, niin ylläolevan ahneen heuristiikan löytämälle ratkaisulle I pätee
   $$\sum_{i \in I} v_i \geq \text{opt}(T) - \max\{\, v_i \mid 1 \leq i \leq n \,\} \;.$$
   Päättele tästä, että ahneen heuristiikan modifiointi, joka palauttaa joko yllämainitun ahneen ratkaisun tai parhaan *yksialkioisen* ratkaisun (mikäli se on parempi), on 2-approksimointialgoritmi repunpakkausongelmalle. (*Vihje*: Olkoon I ahne ratkaisu ja I^* jokin optimaalinen ratkaisu. Olkoon $j = \min\{\, i \mid i \notin I \text{ ja } i \in I^* \,\}$. Osoita, että $\sum_{i \in I} v_i \geq \text{opt}(T) - v_j$.)

5. Tarkastellaan seuraavaa NP-kovaa *lokerointiongelmaa* (Bin Packing):

   > On annettu jono välin $(0, 1)$ rationaalilukuja $x_1, \ldots, x_n$. Luvut on ositettava mahdollisimman pieneen määrään osajoukkoja (”lokeroita”) siten, että kunkin osajoukon alkioiden summa on korkeintaan 1.

   Ongelman ahne First Fit -approksimointialgoritmi toimii seuraavasti: Luvut käsitellään järjestyksessä $x_1, \ldots, x_n$. Luku x_i sijoitetaan lokeroiden järjestyksessä ensimmäiseen lokeroon, jossa sille on vielä tilaa. Osoita, että tämä menettely on 2-approksimointialgoritmi. (*Vihje:* kuinka moni lokero voi jäädä puolilleen?)